ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/362155240

كتاب بحوث العمليات-الجزء الثاني- محمد بداوي

Book · July 2022

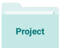
CITATIONS
0

1 author:

Badaoui Mohamed
Université Amar Telidji Laghouat
9 PUBLICATIONS **1** CITATION

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



La Nouvelle Vision De L'Évaluation De La Performance Du Groupe De Travail : La Théorie Binaire View project

All content following this page was uploaded by Badaoui Mohamed on 21 July 2022.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

الدكتور

محمد بداوي

لطلبة العلوم

الاقتصادية

التسيير

التجارية

التكنولوجية

دار الضحى للنشر والإشهار
الجلفة - الجزائر

Dareldouha2014@gmail.com
027.92.27.38/05.50.87.37.71

الطبعة الأولى
2022

الإيداع القانوني: جويلية
ردمك: 978-9931-835-82-0

حقوق التأليف محفوظة للمؤلف

تصميم وتنسيق حمدي مصطفى الأزهر
hamdilazhar3@gmail.com

بحوث العمليات – الجزء الثاني

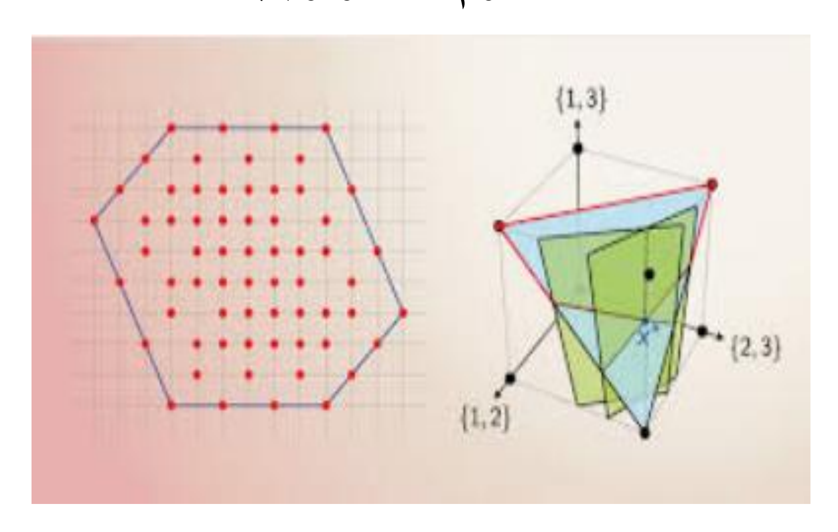
Operations Research

الدكتور: محمد بداوي

لطلبة:

– العلوم الإقتصادية و علوم التسيير والعلوم التجارية

– العلوم التكنولوجية



مع التطبيق على برنامج Maple

قال الله عز وجل في كتابه الحكيم:

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

[سورة التوبة: 105]

دعاء

إذا مررتم من هُنا رشوا رذاذًا باردًا من دعواتكم لأمي تسعدها في قبرها، اللهُم فردوساً ونعيماً غير مقطُوع اللهُم أرحم أمي برحمتك التي وسعت كل شي، اللهم أجعل ثواب كل من يقرأ هذا الكتاب ويستفيد منه في ميزان حسناتي وميزان حسنات أمي (الحاجة ستي بداوي).

أمي جنة الدنيا تحت قدميك وأنت من سهرتِ على تربيتي وراحتي في صغري وكم نلتِ من معاناة تجاهي ولولاكِ بعد الله ما صرت وما تعلمت.

اللهم أرحم أمي وأغفر لها وأجعل قبرها روضةً من رياض الجنة هي وجميع أموات المسلمين.

فهرس الكتاب: بحوث العمليات (الجزء 1+2)

مقدمة:

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم النبيئين وسيد المرسلين، نبينا محمد الهادي الأمين الذي بعثه الله رحمة للعالمين، وعلى أله وأصحابه وأنصاره وأتباعه ومن أهتدى بهديه وعمل بسنته إلى يوم الدين ، و بعد:

يتضمن هذا الكتاب دروس موجهة الى طلبة ليسانس (علوم اقتصادية وعلوم تسيير وعلوم تجارية والعلوم التكنولوجية)، كما يمكن لطلبة الرياضيات الاستفادة منه أيضا ، وشعر المؤلف بالحاجة لمثل هذا الكتاب من خلال تدريسه لمقياس الرياضيات ، ومن خلال إشرافه على عدد من المذكرات، ويمكن أن يكون هذا الكتاب بما يحويه ، وبما يتضمنه من أمثلة تطبيقية عديدة، ذو فائدة لقطاع واسع من القراء المهتمين بالرياضيات التطبيقية والأدوات الكمية المطبقة في الاقتصاد و المؤسسة.

إن هذا الكتاب كأي نتاج علمي لا يخلو من النواقص والهفوات، وكل أملنا أن يسهم في تطوير البحث العلمي.

أتقدم بشكري إلى أخي **بن دومة محمد الطاهر** وذلك لتصميمه الرائع لغلاف هذا الكتاب ، ونسأل الله أن يجعل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم، ويجعله في ميزان حسناتنا، وأن ينفع به الطلاب والدارسين، وأي ملاحظة علمية يرجى إرسالها عبر بريدنا الالكتروني التالي: m.badaoui@lagh-univ.dz

و الله الموفق

المؤلف الأغواط – الجزائر– 2022/06/23

الفصل التاسع : نظرية الألعاب Games Theory

تمهيد:

نظرية الألعاب هي دراسة الطرق التي تؤدي من خلالها اختيارات العوامل الاقتصادية المتفاعلة إلى تحقيق نتائج تتعلق بتفضيلات هؤلاء الوكلاء (نطلق عليهم اللاعبون).

تم وصف الأسس الرياضية لنظرية الألعاب الحديثة في (1913) من قبل إرنست زيرميلو [1] في مقاله Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels، وبواسطة إميل بوريل [2] (1921) في مقالة " نظرية اللعبة والمعادلات المتكاملة مع نواة متماثلة ، ثم John von Neumann عام 1928، وقد تم تطوير هذه الأفكار بشكل أكبر بواسطة Oskar Morgenstern[3] و John von Neumann[4] في عام 1944 في كتابهما: " Theory of Games and Economic Behaviour " الذي يعتبر أساس نظرية الألعاب الحديثة، وكان

---

[1] **إرنيست زيرميلو 1871 - 1953 Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo** ، رياضياتي ألماني.

[2] - **إميل بوريل 1871 - 1956 Édouard Justin Émile Borel رياضياتي فرنسي**، من المؤسسين لنظريقة القياس رفقة مواطنه هنري لوبيغ.

[3] - **أوسكار مورجنسترن (1902- 1977) Oskar Morgenstern** اقتصادي ألماني- أمريكي، وبالتعاون مع الرياضياتي جون فون نيومان تم تأسيس المجال الرياضي لنظرية الألعاب .

[4] - **جون فون نيومانJohn von Neumann (1903 – 1957)** ، رياضياتي مجري – أمريكي ، ولد في بودابيست و توفي في الولايات المتحدة الأمريكية ، يعتبر كذلك كفيزيائي، وعالم حاسوب، ومهندسا، وموسوعيا، أعتُبر فون نيومان عموما الرياضياتي الأبرز في زمانه، وقيل أنه « أخر ممثل للرياضياتيين العظماء »، دمج بين العلوم البحتة والتطبيقية، قدم نيومان إسهامات كبرى في العديد من الميادين (أُسس الرياضيات، والتحليل الدالي، ونظرية إرجوديك ergodic theory ، ونظرية الزمر، ونظرية التمثيل، و المؤثرات الجبرية ، والهندسة الرياضية، والطوبولوجيا، والتحليل العددي)، والفيزياء (ميكانيكا الكم، وجريان الموائع (الهيدرو ديناميك)، وميكانيكا الكم الإحصائية، والاقتصاد (نظرية الألعاب)، والحوسبة (هيكلة فون نيومان، والبرمجة الخطية، والآلات المتضاعفة ذاتيًا، والحوسبة السنوكاستيكية (العشوائية)، والإحصاء، كان رائدا في تطبيق نظرية المؤثرات على ميكانيكا الكم في تطوير التحليل الدالي، وشخصية رئيسة في تطوير نظرية الألعاب ومفاهيم الأتمتة الخلوية، والبنّاء الشامل والحاسوب الرقمي.

[4] - **ديفيد جيل (1921 – 2008 David Gale)** رياضياتي واقتصادي أمريكي، تشمل مساهمات Gale في الاقتصاد الرياضي دليلا مبكرا على وجود توازن المنافسة ، وحله لمسألة Ramsey من الناحية النظرية للنمو الأمثل.

هذا لنمذجة ألعاب محصلتها صفر حيث يكون مجموع المكاسب بين اللاعبين دائما مساويا للصفر، وفي نفس الفترة ظهرت طريقة السمبلكس (دانتزيغ [1]1947)، وكان بفضل هذه الطريقة أنها مكنت من تقديم طريقة ناجعة في حل العديد من المباريات المعقدة، ولا ننسى مساهمة جون ناش Nash [2](1950)، الذي كان أول من قدم تعريفا للإستراتيجية المثلى للعبة مع العديد من اللاعبين تسمى توازن ناش، تم تنقيح هذه النتيجة المتأخرة الرائعة بواسطة رينهارد سولتن Reinhard Selten[3] (1965) بحيث أكسبهم ذلك "جائزة نوبل في الاقتصاد" في عام 1994 لعملهم في نظرية الألعاب ، جنبا إلى جنب مع جون هارساني[4] Harsányi János الذي عمل في نظرية الألعاب بمعلومات غير كاملة (1967).

ومنذ ذلك الحين لا تزال الأبحاث قائمة في هذا المجال نظرا لوجود بيئة خصبة في تطبيقه، حيث أن جل الشركات الاقتصادية تسعى للتفوق على منافسيها والسعي لبسط السيطرة على الأسواق.

أصبحت نظرية اللعبة أداة نظرية وتطبيقية مهمة للاقتصاد الجزئي منذ عام 1944 ، وقد تم منح 11 "جائزة نوبل في الاقتصاد" لخبراء الاقتصاد عن أبحاثهم حول نظرية

[1] - **جورج برنارد دانتزيغ George Bernard Dantzig 1914 - 2005** ، رياضياتي أمريكي قدم مساهمات في الهندسة الصناعية ، وبحوث العمليات ، وعلوم الكمبيوتر ، والاقتصاد ، والإحصاء، يشتهر Dantzig بتطويره لخوارزمية Simplex لحل مسائل البرمجة الخطية ، وعمله الأخر في الإحصاء ، حل Dantzig مسألتين مفتوحتين في النظرية الإحصائية (الحادثة الشهيرة التي أعتقد أن المسألتين عبارة عن واجب منزلي بعد وصوله متأخرا إلى محاضرة أستاذه **Jerzy Neyman**)

[2] - **جون فوربس ناش John Forbes Nash (1928- 2015)** رياضياتي أمريكي قدم مساهمات أساسية في نظرية الألعاب والهندسة التفاضلية ودراسة المعادلات التفاضلية الجزئية، كذلك كانت لناش نظرة ثاقبة حول العوامل التي تحكم الفرصة وصنع القرار داخل الأنظمة المعقدة الموجودة في الحياة اليومية ، حاز على جائزة نوبل في الاقتصاد سنة 1994 رفقة جون هارساني و رينهارد سولتن.

[3] - **رينهارد سولتن Reinhard Selten 1930 - 2016** ، إقتصادي ألماني .

[4] - **جون هارساني Harsányi János 1920 - 2000** ، اقتصادي مجري – أمريكي.

الألعاب، بالإضافة إلى مجال الاقتصاد ، نجد تطبيق نظرية الألعاب في العلوم الاجتماعية والعلوم السياسية والتحليل الاستراتيجي وكذلك في العلاقات الدولية أو في نظرية المنظمات وفي علم الأحياء التطوري.

9-1- فلسفة نظرية الألعاب:

تدرس نظرية الألعاب السلوكيات المقصودة أو الحقيقية أو اللاحقة للأفراد الذين يواجهون مواقف الخصم ، وتسعى إلى تسليط الضوء على الاستراتيجيات المثلى، من الواضح أنه يمكن أحيانا تمثيل مواقف مختلفة جدا بهياكل حوافز قابلة للمقارنة ، وتشكل العديد من الأمثلة من نفس اللعبة.

تنطبق نظرية الألعاب غير التعاونية على المواقف التي يلعب فيها اللاعبون عن قصد عندما يكون لديهم على الأقل أهداف معادية جزئيا (لذلك لا تنطبق على حالات التعاون الكامل ، ولكن على المنافسة أو متغيرها)، لا ينطبق ذلك على مواقف اللعبة ضد الطبيعة غير التخطيطية والسلبية ، والمواقف التي قد يكون فيها في الواقع لاعب واحد فقط.

9-1-1- العناصر الأساسية للعبة:

أولا : اللاعبون players: الأفراد الذين يتخذون القرارات.

ثانيا: قواعد اللعبة rules of the game : من يتحرك ومتى؟ ما الذي يستطيعون فعله؟

ثالثا: النتائج outcomes: ماذا تنتج مجموعات مختلفة من الإجراءات؟

رابعا: العوائد payoffs : ما هي تفضيلات اللاعبين على النتائج؟

خامسا: المعلومات information: ماذا يعرف اللاعبون عندما يتخذون القرارات؟

سادسا: الفرصة chance: توزيع احتمالي على أحداث الصدفة إن وجدت.

سابعا: مجموعات المعلومات (Information Sets) : هي مجموعة من العقد التي تكون النحو الاتي:

1- نفس اللاعب i يتحرك في كل من هذه العقد؛
2- تتوفر نفس الحركات في كل من هذه العقد.

ثامنا: تقسيم المعلومات: هو تخصيص لكل عقدة غير طرفية للشجرة بمجموعة معلومات، يجب أن تكون عقدة البداية " بمفردها ".

9-1-2- الاستراتيجيات Strategies :

استراتيجية اللاعب هي خطة تحدد الإجراء الذي سيتخذه في كل مجموعة معلومات سينقلها (بما في ذلك مجموعات المعلومات التي لن يتم الوصول إليها وفقا لهذه الإستراتيجية)، من الناحية الحسابية فإن استراتيجية اللاعب i هي دالة S_i تحدد كل مجموعة معلومات h_i خاصة باللاعب i إلى إجراء متاح في h_i.

يمكن تقسيم الاستراتيجية إلى:

أولا: استراتيجيات بحتة pure Strategies :

في الإستراتيجية البحتة يتبنى اللاعبون إستراتيجية توفر أفضل المكاسب، بمعنى أخر هي الإستراتيجية التي توفر أقصى ربح أو أفضل نتيجة للاعبين، لذلك تعتبر أفضل استراتيجية لكل لاعب في اللعبة.

ثانيا: استراتيجيات مختلطة Mixed Strategies :

في كثير من الحالات قد لا يتمكن اللاعب من تخمين الاستراتيجيات التي يلعبها اللاعبون الأخرون بالضبط من أجل تغطية هذه المواقف نستخدم الاستراتيجيات المختلطة ، بحيث أن الإستراتيجية المختلطة للاعب هي توزيع احتمالي على مجموعة إستراتيجياته.

إذا كان اللاعب i له إستراتيجيات $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{ik}\}$ ، فأن الاستراتيجية المختلطة للاعب i σ_i هي دالة في S_i حيث: $0 \le \sigma_i(s_{ij}) \le 1$.

$$\sigma_i(s_{i1}) + \sigma_i(s_{i2}) + ... + \sigma_i(s_{ik}) = 1$$

هناك العديد من التفسيرات للاستراتيجيات المختلطة ، من التوزيع العشوائي المتعمد (كما في رمي قطعة نقد) إلى عدم تجانس الاستراتيجيات في المجتمع المدروس، ومع ذلك في جميع الحالات فإنها تعمل كجهاز لتمثيل حالة عدم اليقين التي يواجهها اللاعبون الأخرون فيما يتعلق بالاستراتيجية التي يلعبها اللاعب i طوال المباراة ، يتم تفسير σ_i على أنه معتقدات اللاعبين الأخرين حول لعب إستراتيجية اللاعب i.

9-2- أنواع الألعاب:

تصنف نظرية الألعاب إلى فئات بناء على مقاربات القرار الخاصة بحلها، الفئات الأكثر شيوعا هي:

9-2-1- الألعاب التعاونية:

الألعاب التعاونية هي الألعاب التي نسعى فيها للحصول على أفضل وضع للاعبين وفقا لمعايير مثل العدالة، يعتبر أن اللاعبين سيلعبون بعد ذلك ما تم اختياره، وهذا نهج

معياري على سبيل المثال، عند مفترق طرق لكل من السائقين خيار المرور أم لا، يفرض كود الطريق السريع استراتيجيته على كل لاعب من خلال اللافتات.

9-2-2- نظرية التفاوض

تستند نظرية التفاوض الحديثة إلى حقيقة أن التفاوض هو لعبة محصلتها صفر، وبالتالي فإن فن التفاوض لا يتمثل في جعل المحاور يستسلم لخط المعارضة الرئيسي (السعر على سبيل المثال) أكثر من إيجاد ترتيبات خارج هذا الخط من شأنها أن تجلب الكثير لأحدهم دون أن يكلف الكثير، تسمى استراتيجيات الفوز أو الفوز للجانبين (رابح – رابح).

9-3- ألعاب استراتيجية ذات المجموع الصفري وغير الصفري:

ألعاب المحصل الصفري هي جميع الألعاب التي يكون فيها المجموع "الجبري" لمكاسب اللاعبين ثابتا)، الشطرنج أو البوكر هي ألعاب محصلتها صفر لأن مكاسب إحداهما هي بالضبط خسائر الأخرى.

مواقف العمل أو الحياة السياسية أو معضلة السجين هي ألعاب محصلتها غير صفرية لأن بعض النتائج تكون مربحة للجميع أو أكثر ضررا للجميع، تاريخيا بدأنا بدراسة ألعاب محصلتها صفر عند التطرق لموضوع قانون حفظ الطاقة :المجموع الجبري الصفري ، يمكن تصور لعبة المجموع غير الصفري في الأمثلة التالية : في العلوم الاجتماعية ، يستشهد أحيانا بأيديولوجية التناغم الصناعي لليابان الحديثة (تحالف ثلاثي بين رأس المال والعمل والحكومة) كمثال على لعبة محصلتها غير صفرية، في التجارة الدولية مثال أخر عن اللعبة ذات المجموع غير الصفري في المنافسة

التعاونية بين النمور الأسيوية والتنين الأسيوي (الصين) ، في أعقاب المعجزة اليابانية في الخمسينيات والستينيات من القرن الماضي التي فتحت الأبواب لكوريا وهونغ كونغ وسنغافورة وتايوان وفيتنام في تطور مشترك تقني تجاري.

9-3-1- لعبة متزامنة أو غير متزامنة:

في لعبة متزامنة يقرر اللاعبون حركتهم في وقت واحد دون معرفة ما يلعبه الأخرون، في لعبة غير متزامنة (أو بديلة ، ثنائية اللاعبين) ، يلعبون واحدا تلو الأخر، و في كل مرة لديهم معلومات حول حركة الخصم.

9-3-2- العاب متكررة:

غالبا ما يؤدي تكرار اللعبة مع معرفة النتائج الوسيطة إلى تغيير مسارها بشكل جذري (أفضل الحركات والنتيجة)، على سبيل المثال قد يكون من المفيد أحيانا المخاطرة بخسارة "شيء" واختبار اللاعبين الأخرين وإعداد استراتيجيات اتصال من خلال الحركات التي يتم لعبها (في حالة عدم وجود أي وسيلة اتصال أخرى).

9-3-3- معلومات كاملةPerfect Information:

يُقال أن اللعبة تحتوي على معلومات كاملة إذا كان كل لاعب يعرف عند اتخاذ القرار:

- إمكانياته في العمل؛
- احتمالات عمل اللاعبين الأخرين؛
- المكاسب الناتجة عن هذه الأعمال؛
- دوافع اللاعبين الأخرين؛

علاوة على ذلك ، نتحدث عن لعبة بمعلومات كاملة في حالة اللعبة بآلية متسلسلة ، حيث يعرف كل لاعب بالتفصيل جميع الإجراءات التي تم تنفيذها قبل اختياره.

9-3-4- معلومات غير كاملةImperfect information: عدم اليقين بشأن حالة اللعبة الحالية ، مثل الإجراءات التي يتخذها الأخرون .

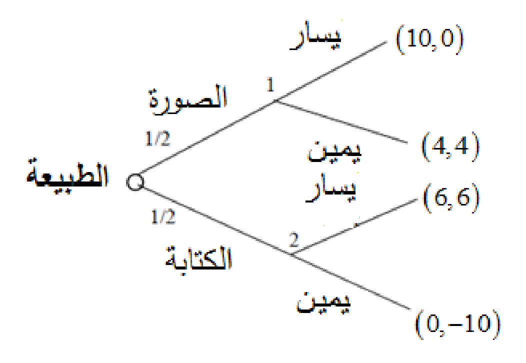
9-3-5- معلومات غير تامةIncomplete information : عدم اليقين بشأن قواعد اللعبة ، مثل الأدوات المساعدة للاعبين الآخرين (ألعاب بييز Bayesian Games).

9-3-6- الطبيعة كلاعب :

تشمل مجموعة المعلومات : اللاعبين صانعي القرار المشاركين في اللعبة، ومع ذلك يوجد مجال للصدفة في العديد من الألعاب على سبيل المثال رمي حجر النرد في لعبة الطاولة ، غالبا ما يواجه اللاعبون عدم اليقين بشأن بعض الحقائق ذات الصلة بما في ذلك ما يعرفه اللاعبون الأخرون، في هذه الحالة مرة أخرى تلعب الصدفة دورا لتمثيل هذه الاحتمالات ، نقدم لاعبا خياليا: **الطبيعة** Nature ، لا يوجد عائد للطبيعة في العقد النهائية ، وفي كل مرة يتم فيها تخصيص عقدة للطبيعة يجب تحديد توزيع احتمالي على الفروع التالية ، على سبيل المثال ، الكتابة مع احتمال 2/1 والصورة مع احتمال 2/1 .

على سبيل المثال نضع في الاعتبار اللعبة في الشكل (9-1) حيث يتم رمي عملة نقدية متوازية يكون احتمال الصورة هو ½، إذا ظهرت الصورة يختار اللاعب 1 بين اليسار واليمين، وإذا ظهرت الكتابة يختار اللاعب 2 بين اليسار واليمين، تعتمد العوائد أيضا على قرعة النقد.

الشكل (9-1):الطبيعة كلاعب



تم إدراج عنصر الطبيعة من قبل هارساني John Harsanyi's وذلك لتحويل اللعبة الاستراتيجية ذات المعلومات غير التامة إلى لعبة استراتيجية ذات معلومات غير كاملة، حيث يتم استخدام مفهوم لعبة بييز ، والتي تتمثل حسب هارساني ان كل لاعب يسعى لتعظيم ربحه المتوقع مع الأخذ بعين الاعتبار التوزيع الاحتمالي لاستراتيجيات اللاعبين الأخرين.

9-3-7- تحويل هارساني Harsanyi Transformation :

حيلة هارساني لدراسة ألعاب المعلومات غير التامة

تحويل لعبة المعلومات غير التامة إلى لعبة المعلومات غير الكاملة، بحيث تم تقديم خطوة مسبقة من قبل الطبيعة تحدد نوع اللاعب 1 (أي تكلفته) ، يلاحظ اللاعب 1 حركة الطبيعة لكن اللاعب 2 لا يستطيع ذلك.

لكن اللاعب 2 يعرف احتمالية تحرك الطبيعة، معلومات اللاعب 2 غير التامة حول نوع اللاعب 1 تصبح معلومات اللاعب 2 غير كاملة عن حركة الطبيعة.

9-3-8- ألعاب محددة:

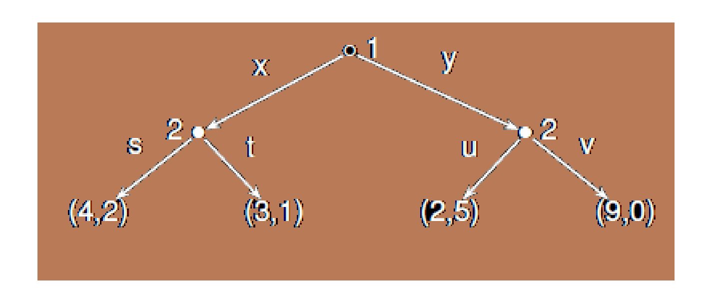
تشكل ألعاب Nim حالة خاصة من لعبة محصلتها صفر، دون تدخل الصدفة وفي معظم الحالات مع عدد من المواقف المحدودة في حالتهم الخاصة ، توفر نظرية الرسم البياني أداة أكثر فائدة من نظرية اللعبة المناسبة، يتم تمييز فكرة جوهر اللعبة (مجموعة العقد التي يتم ضمان النصر من خلالها إذا نجح اللاعب أثناء اللعبة ثم يلعب على النحو الأمثل) هناك.

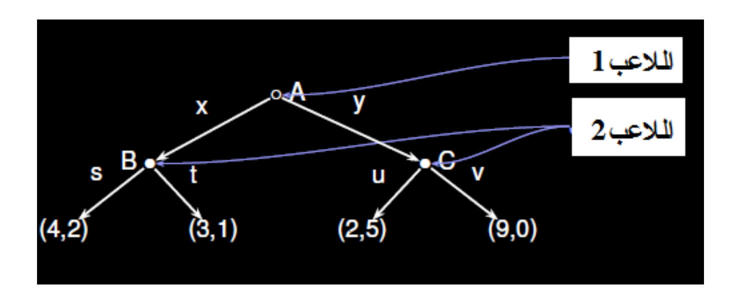
9-4- تمثيل الألعاب Representation of games :

9-4-1- الصيغة الشاملة Extensive form :

في جميع الألعاب يمكن تمثيل القرارات بشجرة ، ترتبط كل عقدة باللاعب الذي يقرر، كل خيار يشكل فرعا، مكاسب الجميع مرتبطة بالنهايات عندما يكون من الممكن تمثيلها (نهاية اللعبة)، ومع ذلك لا يحتاج اللاعب إلى معرفة كيفية وصوله إلى عقدة: فقط الوضع الحالي للعبة هو الذي يهم ، والمواقف المطلوبة في المستقبل عندما يسمح بحركات معينة فقط بعد حدث معين ، فإن هذا الحدث ليس سوى عنصر واحد من العناصر التي تتجسد في الحالة الحالية للعبة، نوضحها في الشكل التالي:

الشكل (9-2): الصيغة الشاملة





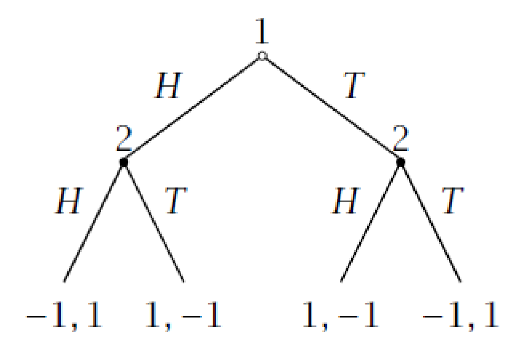
حيث أن $E=\{1,....,n\}$ تمثل اللاعبين، مجموعة العقد $\{A,\mathrm{B},....,\}$ تمثل الحركات، مجموعة الفروع $\{x,y,....,\}$ تمثل البدائل في كل حركة.

مثال1:

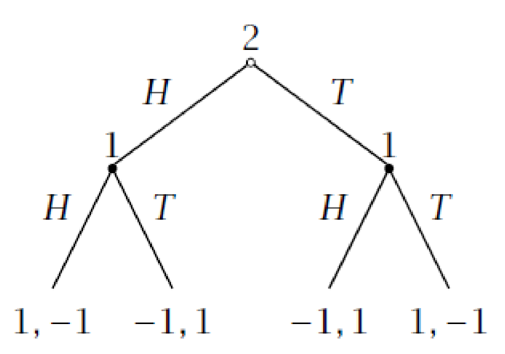
نفرض في لعبة قطعة نقد منتظمة $\{H,T\}$، حيث تمثل H: الصورة و T : تمثل الكتابة ، هناك لاعبان يجب على كل منهما دفع دينار واحد، إذا كانت أوجه قطع النقد متطابقة (إما ظهور صورتان أو كتابتان) فإن اللاعب 1 يدفع دينار واحدا للاعب 2، إذا لم تتطابق يدفع اللاعب 2 دينارا واحدا للاعب 1.

هذه لعبة بمعلومات كاملة، ولكن هذا المثال يغفل أهمية جزء من المعلومات: ماذا يعرف اللاعبون عندما يتحركون؟ بعد قليل من التفكير يجب أن يكون واضحا أن هناك خمس طرق يمكن للاعبين أن يتحركوا بها: (1) اللاعب 1 يتحرك أولا ويلاحظ اللاعب 2 تصرف خصمه قبل أن يتصرف بنفسه (2) عكس الحالة الأولى، (3) يتحرك اللاعب 1 دون معرفة تحرك اللاعب 2 ، (4) عكس الخطوة (3)، (5) يتحرك اللاعبون في نفس الوقت لأنه في (1) و (2) يعرف كل لاعب ما فعله الأخر في الماضي عندما يحين وقت التحرك ، فهي ألعاب معلومات كاملة، ومع ذلك في الحالات الثلاث الأخيرة لا يعرف أي من اللاعبين ما فعله الأخر وبالتالي فهي ألعاب تحتوي على معلومات غير كاملة.

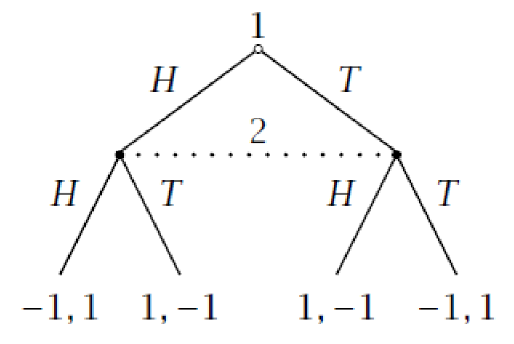
الشكل: (3−9) (الحالة 1) : اللاعب 1 يتحرك أولا ، يلاحظ اللاعب 2 عمله وتحركاته



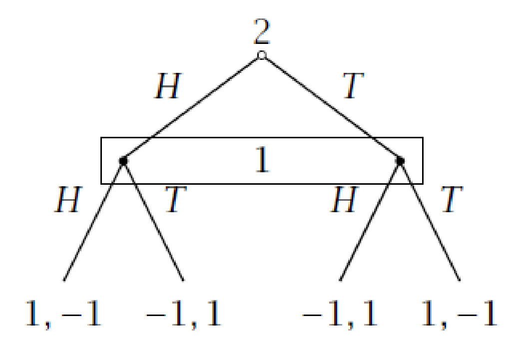
الشكل: (3−9) (الحالة 2) : اللاعب 2 يتحرك أولا ، يلاحظ اللاعب 1 عمله وتحركاته



الشكل: (3−9) (الحالة 3) : يتحرك اللاعب 1 دون معرفة تحرك اللاعب 2

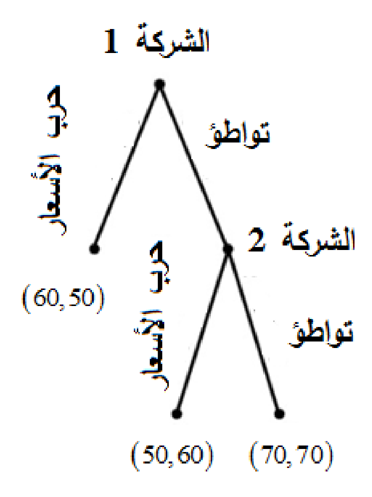


الشكل: (9-4) (الحالة 4) : يتحرك اللاعب 2 دون معرفة تحرك اللاعب 1

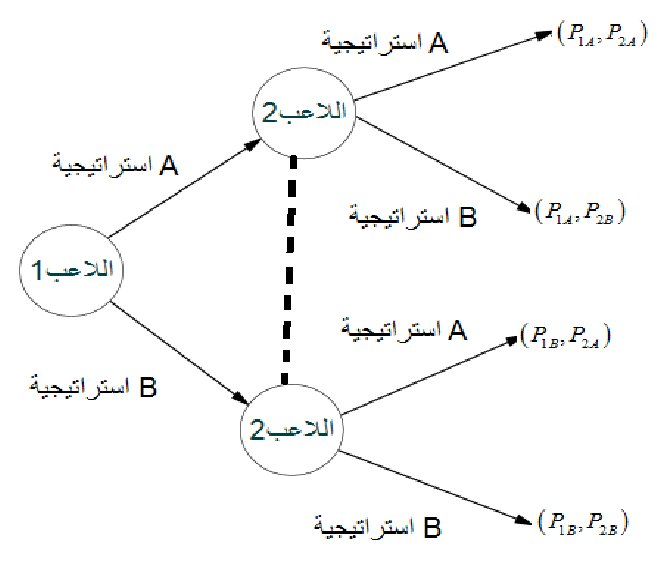


مثال2:

تشترك شركتان في السوق ، حصل اتفاق بينهما للمحافظة على ارتفاع الأسعار(تواطؤ)، يمكن لكل شركة أن تقرر التوقف عن التواطؤ وبدء حرب أسعار من أجل زيادة حصتها في السوق أو حتى إجبار الشركة الأخرى على الخروج من السوق، يمكن للشركة 1 إما الاستمرار في التواطؤ مع الشركة 2 أو بدء حرب أسعار، إذا وافق كلاهما على التواطؤ فسيحصلان على 70 مليون دينار لكيليهما (70,70) ومع ذلك ، إذا قرر أحدهم بدء حرب أسعار ، فستكون مجموعة من العوائد على حسب استراتيجية كل شركة ، نوضح ذلك في المخطط التالي:



ومن الجدير بالذكر أن النموذج الشامل يمكن استخدامه أيضا لوصف الألعاب المتزامنة باستخدام مجموعات المعلومات ، كما هو موضح في شجرة الشكل(9-5)، مجموعات المعلومات هذه التي يتم تمثيلها عادة بخط متقطع تعني أن اللاعب لا يعرف العقدة التي هو فيها ، مما يشير إلى معلومات غير كاملة. الشكل (9-5)



9-4-2- التمثيل المصفوفي:

إذا كانت اللعبة تحتوي على لاعبين فقط وعدد صغير بشكل معقول من الاستراتيجيات الممكنة ، فيمكن تمثيل اللعبة في شكل جدول يسمى مصفوفة العائد (الدفع).

نستخدم المثال السابق (9-5) في تعريف اللعبة من خلال عرض اللاعبين المختلفين على كل جانب من المصفوفة (هنا اللاعبون 1 و 2) ، كل استراتيجية أو اختيار يمكنهم القيام به (هنا الإستراتيجيتان A و B) ومجموعات العوائد التي سيحصلون عليها مقابل إستراتيجية معينة $(P_{1A},P_{2A},P_{1A},P_{2B},P_{1B},P_{2A},P_{1B},P_{2B})$.

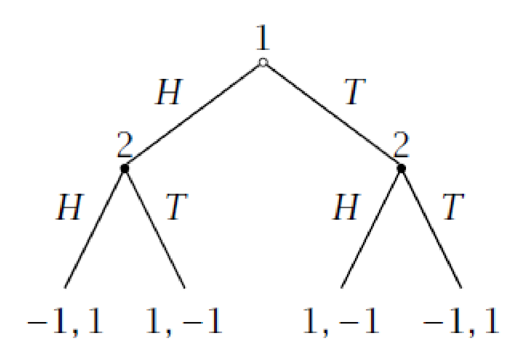
		اللاعب 2	
		استراتيجية A	استراتيجية B
اللاعب 1	استراتيجية A	(P_{1A}, P_{2A})	(P_{1A}, P_{2B})
	استراتيجية B	(P_{1B}, P_{2A})	(P_{1B}, P_{2B})

مثال3:

بالرجوع إلى **(9−3)** (**الحالة 1**) ، الشكل (9−6) حالة معلومات كاملة، **المطلوب** :

إيجاد الشكل الاستراتيجي الطبيعي:

الشكل (9−6)



حل المثال3:

نلاحظ أن اللاعب 1 لديه استراتيجيتان خالصتان $S_1 = \{H, T\}$ ، يمكن للاعب 2 أن يشترط اختياره على اللاعب 1 ويجب أن يحدد استراتيجياته وفق إجرائيين:

بعد اختيار اللاعب1: H سنكتب استراتيجية اللاعب2 على أنها الزوج $a_H \in A_2(H)=\{H,T\}$ وهذا هو اختياره بعد اختيار اللاعب1.

بعد اختيار اللاعب1: T سنكتب استراتيجية اللاعب2 على أنها الزوج $a_T \in A_2(T)=\{H,T\}$ وهذا هو اختياره بعد اختيار اللاعب1.

إذن استراتيجية اللاعب2 تتكون من الزوج المرتب (a_H, a_T) ، ومن ثم نضع استراتيجية اللاعب2 النهائية والتي تتكون من أربع استراتيجيات خالصة:

$S_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ ، تحتوي اللعبة الأن على ثمانية استراتيجيات:

$$S_1 \times S_2 = \begin{Bmatrix} (H,(H,H)),(H,(H,T)),(H,(T,H)),(H,(T,T)) \\ (T,(H,H)),(T,(H,T)),(T,(T,H)),(T,(T,T)) \end{Bmatrix}$$

نظرا لعدم وجود تحركات بالصدفة، أي ليست هناك حاجة لتحويل دوال المنفعة، لذلك يتم تقديم الشكل الاستراتيجي العادي كما يلي:

		اللاعب 2			
		H,H	H,T	T,H	T,T
اللاعب 1	H	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)
	T	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)

ملاحظة:

في حالة مباريات ذات المجموع الصفري كالمثال السابق، فأن النتيجة (a,b) تعني أن $b=-a$، ظهر اصطلاح بكتابة النتيجة $(a,-a)$على الشكل a ، أي العوائد العائدة على اللاعب 1 فقط ، أما عوائد اللاعب2 فهي معروفة ضمنيا، وبذلك المصفوفة أعلاه تكتب على النحو الاتي:

		اللاعب 2			
		H,H	H,T	T,H	T,T
اللاعب 1	H	-1	-1	1	1
	T	1	-1	1	-1

ملاحظة:

الصيغة الشاملة سميت بهذا الاسم لأنها تشمل على كافة المعلومات والنتائج المتعلقة بالمباراة، كما يطلق على مصفوفة المباراة اسم الصيغة الطبيعية Normal form .

9-5- الحل الأمثل للألعاب الثنائية ذات المجموع الصفري optimal solution of two-Person Zero-sum games:

قد تكون ألعاب محصلتها الصفرية لشخصين حتمية أو احتمالية، سيكون للألعاب الحتمية نقاط سرج saddle points ، وتوجد استراتيجيات بحتة في مثل هذه الألعاب،

في المقابل لن تحتوي الألعاب الاحتمالية على نقاط سرج ويتم اتخاذ استراتيجيات مختلطة بمساعدة الاحتمالات.

9-5-1- نقطة السرج saddle point:

تعريف

نقطة السرج هي موضع العنصر في مصفوفة العائد، وهي الحد الأدنى في صفها والحد الأقصى في عمودها.

في هذا النوع يكون كسب اللاعب الأول خسارة الثاني، ويمكن أن يلعب كل لاعب بأكثر من استراتيجية، وتسمى في هذه الحالة باستراتيجية التوازن.

خطواتها تكون على النحو الاتي:

- نحاول ايجاد أكبر قيمة في كل عمود ونضعها في صف Max ، من خلال هذا الصف نحدد أصغر قيمة MiniMax وتسمى هذه باستراتيجية اللاعب الثاني (V_2).
- بطريقة مماثلة وعكسية مع الصف نجد MaxMin وتسمى هذه باستراتيجية اللاعب الأول (V_1).

مثال4:

تبيع شركتان A و B نوعين من الزيوت النباتية ، ترويج الشركة " A " لمنتجها يتم عبر الفايسبوك (A1) والتلفزيون (A2) واليوتيوب (A3)، بنفس الكيفية يتم ترويج الشركة " B " لمنتجها: (B1) الفايسبوك (B2) التلفزيون (B3) اليوتيوب، اعتمادا على فعالية كل حملة إعلانية، يمكن لشركة واحدة أن تستحوذ على جزء من السوق من

الأخرى، تلخص المصفوفة التالية النسبة المئوية للسوق التي استولت عليها الشركة A أو فقدتها:

	B1	B2	B3
A1	7	-4	10
A2	8	7	12
A3	-3	2	4

المطلوب: أوجد قيمة المباراة بالنسبة للشركتين (A و B) ونقطة السرج؟

حل المثال4:

نضيف عمود Min وصف Max.

	B1	B2	B3	Min
A1	7	-4	10	-4
A2	8	7	12	7
A3	-3	2	4	-3
Max	8	7	12	

$$V_1 = MaxMin = 7 \ , \ V_2 = MinMax = 7$$

استراتيجية اللعب بالنسبة للاعب الأول = استراتيجية اللعب بالنسبة للاعب الأول.

فنقطة السرج تعطى كما يلي: (A_2, B_2)

قيمة المباراة: $V = 7$.

تفسير النتائج:

يعتمد حل اللعبة على مبدأ تأمين الأفضل من الأسوأ لكل لاعب، إذا اختارت الشركة " A " الإستراتيجية A1 ، فبغض النظر عما تفعله "B " ، فإن أسوأ ما يمكن أن يحدث هو أن " A " تخسر 4٪ من حصتها في السوق إلى "B" ، ويتم تمثيل ذلك بالحد الأدنى لقيمة الإدخالات في الصف 1، وبالمثل مع الإستراتيجية A2 أسوأ نتيجة هي أن تحصل A على 7٪ من B ، وبالنسبة للاستراتيجية A3 ، فإن النتيجة الأسوأ هي أن تخسر A 3 ٪ إلى B، لتحقيق الأفضل على الإطلاق تختار الشركة "A" الإستراتيجية A2 لأنها تتوافق مع القيمة القصوى.

بعد ذلك بالنسبة إلى الشركة "B" تكون مصفوفة العائد المقدمة هي أفضل الحلول لأسوأ حلول "A" بناء على قيمة الحد الأدنى، والنتيجة هي أن الشركة "B" ستختار الإستراتيجية B2.

يتطلب الحل الأمثل للعبة اختيار الإستراتيجيتين A2 و B2 ، مما يعني أنه يجب على الشركتين استخدام الإعلانات التلفزيونية ، سيكون العائد لصالح الشركة "A" ، لأن حصتها في السوق ستزيد بنسبة 7٪ في هذه الحالة ، نقول إن قيمة اللعبة هي 7٪ وأن A و B يستخدمان حل نقطة السرج الخالصة.

يحول حل نقطة السرج دون اختيار استراتيجية أفضل من قبل أي من الشركتين.

إذا انتقلت B إلى إستراتيجية أخرى (B1 أو B3) ، فيمكن للشركة "A " الالتزام بالاستراتيجية "A 2" مما يضمن خسارة أسوأ لـ "B" (8٪ أو 12٪) على نفس المنوال ، لن يسعى A إلى استراتيجية مختلفة لأن B يمكن أن يتغير إلى B1 لتحقيق مكاسب سوقية بنسبة 3٪ إذا تم استخدام A3 من قبل A.

ملاحظة:

ليس دائما أن يكون الحل الأمثل للعبة الإستراتيجية عبارة عن نقطة سرج، قد يتطلب الحل خلط استراتيجيتين أو أكثر بشكل عشوائي ، نوضح ذلك على النحو التالي:

مثال5:

نعتبر مصفوفة العائد التالية:

	B1	B2
A1	7	3
A2	5	9

حل المثال5:

			Min
	7	3	3
	5	9	5
Max	7	9	

نلاحظ أن : $\max(3,5) \neq \min(7,9)$

9-5-2- الإستراتيجية المختلطة:

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد احتمالات اللعب باستراتيجيات مختلفة لكل لاعب، وهناك حالتين:

أولا: إذا كانت مصفوفة العائد من الشكل 2×2 :

تقترح نظرية فون نيومان ما يلي:

- نحتاج إلى تحدب مجموعات الاستراتيجيات مهما كانت ، وتقعر– تحدب concave-convex دالة العائد مهما كانت (لن تكون هناك دائما نقطة سرج في الاستراتيجيات البحتة).
- في معظم الألعاب ذات المجموع الصفري لشخصين، لن تكون هناك نقطة سرج في الإستراتيجيات البحتة لأن ذلك من شأنه أن ينص على أن اللاعبين يجب أن يفعلوا الشيء نفسه دائما.
- يختار اللاعب الذي يختار استراتيجية خالصة بشكل عشوائي صفا أو عمودا وفقا لعملية احتمالية معينة تحدد فرصة لعب كل إستراتيجية خالصة، تسمى أشعة الاحتمال هذه بالاستراتيجيات المختلطة.

تعريف:

الاستراتيجية المختلطة هي شعاع $X=(x_1,x_2,....,x_n)$ للاعب1 و شعاع $Y=(y_1,y_2,....,y_n)$ للاعب2 ، حيث:

$$x_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
$$y_j \geq 0 \ , \ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

x_i : احتمال لاعب الصف i .

y_j : احتمال لاعب العمود j.

نشير إلى مجموعة الاستراتيجيات المختلطة مع مكونات k بواسطة :

$$S_k=\left\{(z_1,z_2,....,z_k)\setminus z_i\geq 0\ ,\ i=1,2,....,k\ ,\ \sum_{i=1}^{n}z_i=1\right\}$$

الإستراتيجية المختلطة للاعب1 هي أي عنصر $X\in S_n$ ، و $Y\in S_m$ بالنسبة للاعب2.

بالنسبة للاستراتيجية البحتة $X\in S_n$ هو عنصر من الشكل
$X=(0,0,.....,0,1,....,0)$ ، الذي يمثل دائما لعب الصف المقابل لموضع 1 في X .

أ- العائد المتوقع:

إذا استخدم اللاعبون استراتيجيات مختلطة ، فلا يمكن حساب العائد إلا باستخدام التوقع.

تعريف:

نظرا لاختيار استراتيجية مختلطة $X\in S_n$ بالنسبة للاعب1 و $Y\in S_m$ بالنسبة للاعب2 بشكل مستقل ، العائد المتوقع للاعب 1 في اللعبة هو :

$$E(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i a_{ij} y_j=XAY^T$$

- في اللعبة ذات المجموع الصفري لشخصين ، العائد المتوقع للاعب 2 يعطي كما يلي: $E(X,Y)$
- الاختيار المستقل للإستراتيجية من قبل كل لاعب يبرر حقيقة ذلك:

احتمال (اللاعب 1 يستخدم i و اللاعب2 يستخدم j)= احتمال(اللاعب 1 يستخدم i)× احتمال(اللاعب2 يستخدم j) (احتمال حدثين مستقلين A و B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- إذا تم لعب لعبة مرة واحدة فقط ، فإن اللاعب 1 يتلقى بالضبط a_{ij} للاستراتيجيات البحتة i و j لتلك اللعبة، عندما يتم لعب اللعبة عدة مرات، يمكن للاعب 1 أن يتوقع ما يقارب $E(X,Y)$.

$$E(X,Y) = XAY^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot A_{n\times m} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix}$$

- في لعبة المصفوفة المختلطة ذات المجموع الصفري، تتمثل الأهداف في أن اللاعب 1 يريد زيادة أرباحه المتوقعة إلى أقصى حد ويريد اللاعب 2 تقليل العائد المتوقع للاعب 1.
- نعرف القيم العلوية والسفلية للعبة المختلطة كما يلي:

$$V^- = \max_{X\in S_n} \min_{Y\in S_m} XAY^T \quad , \quad V^+ = \min_{Y\in S_m} \max_{X\in S_n} XAY^T$$

صحيحة دائما $V^+ = V^-$ بالنسبة للعبة المختلطة.

ب- نقطة السرج في الاستراتيجيات المختلطة:

نقطة السرج في الاستراتيجيات المختلطة هو الزوج (X^*, Y^*) لاحتمال الأشعة $X^* \in S_n, Y^* \in S_m$ والذي يحقق:

$$E(X,Y^*) \le E(X^*,Y^*) \le E(X^*,Y) \ , \ \forall (X \in S_n, Y \in S_m)$$

- إذا قرر اللاعب 1 استخدام إستراتيجية أخرى غير X^* ولكن لا يزال اللاعب2 يستخدم Y^* ، فإن اللاعب1 يحقق عائدا متوقعا أصغر من ذلك الذي يمكن الحصول عليه من خلال التمسك بـ X^* ، بطريقة مماثلة ينطبق كذلك على اللاعب 2.

- إذن $\left(X^*,Y^*\right)$ هي توازن أمثل لكلا اللاعبين.

ج- قيمة اللعبة:

لأي مصفوفة $A_{n\times m}$ فأن: $\max\limits_{X\in S_n}\min\limits_{Y\in S_m} XAY^T = \min\limits_{Y\in S_m}\max\limits_{X\in S_n} XAY^T$ ، نشير إلى القيمة المشتركة $v(A)$ أو قيمة (A) ، وهذه هي قيمة اللعبة، هناك نقطة سرج واحدة على الأقل $X^*\in S_n$ ، $Y^*\in S_m$، لهذا السبب:

$E\left(X,Y^*\right)\le E\left(X^*,Y^*\right)=v(A)\le E\left(X^*,Y\right)$.

- نلاحظ أن المبرهنة تنص على أن هناك دائما نقطة سرج واحدة على الأقل في الاستراتيجيات المختلطة.
- إذا كانت اللعبة تحتوي على نقطة سرج في الاستراتيجيات البحتة ، فيمكن ملاحظة ذلك من خلال حساب V^+ و V^- باستخدام الأعمدة والصفوف كما فعلنا سابقا.

مثال6:

نعتبر مصفوفة العائد الخاصة بالمثال السابق:

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

لكي نتوصل إلى حل للعبة الاستراتيجية وجب البحث عن استراتيجيات عشوائية ، نفرض أن اللاعب1 اختار استراتيجية 1 مع احتمال $x\,(x \geq 0)$، والاستراتيجية 2 باحتمال $(1-x)$، ونفرض أن اللاعب2 اختار استراتيجية 1 مع احتمال $y\,(y \geq 0)$، والاستراتيجية 2 باحتمال $(1-y)$، نرغب في تحديد قيمتي x و y التي تعطي الاستراتيجيات المثلى لكلا اللاعبين، إذن علينا بحساب العائد المتوقع $E(x,y)$.

$$E(x,y) = (x, 1-x)\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$
$$\therefore E(x,y) = 8xy - 6x - 4y + 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

لتحويل (1) إلى جداء عاملين نستخدم الخاصية التالية:

$$axy + bx + cy = d$$
$$\therefore (ax+c)(ay+b) = ad + bc$$

نرجع إلى (1): نلاحظ أن: $a=8\;,\; b=-6\;,\; c=-4\;,\; d=-9$.

$$E(x,y) = 8xy - 6x - 4y + 9 = (8x-4)(8y-6) = -72 + 24 = -48$$
$$\therefore E(x,y) = 64\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right) = -48$$
$$\therefore E(x,y) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right) = -\frac{48}{64} = -\frac{3}{4}$$
$$\therefore E(x,y) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} = 0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

إذن الزوج $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ هو نقطة سرج لـ $E(x,y)$، حيث: $E(x,y) = 6$.

إذا كانت $x=\frac{1}{2}$ ، فعندئذ اللاعب1 يضمن عائد قدره 6، وإذا اختار اللاعب1 أي قيمة لـ p ، فأن اللاعب2 يستطيع اختيار قيمة من شأنها تجعل العبارة (2) تعطي عائدا أقل من 6.

إذا كان $x<\frac{1}{2}$ فالعبارة $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right)$ سالبة طالما $y>\frac{3}{4}$.

إذا كان $x>\frac{1}{2}$ فالعبارة $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right)$ سالبة طالما $y<\frac{3}{4}$.

وبالتالي فأن العائد المتوقع 6 هو أفضل ما يمكن أن يفعله اللاعب1 بشرط استخدام اللاعب2 استراتيجية مثالية ، وهكذا فالاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب1 هي: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

بطريقة مماثلة نجد الاستراتيجية المثلى للاعب2 : $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

العائد المتوقع للعبة هو 6 عندما يلعب اللاعبين 1و2 استراتيجياتهم المثلى.

التطبيق باستخدام برنامج Maple :

```
> Restart :
> with(LinearAlgebra) : with(Optimization) :
```

Total Conflict Games

```
> TotalConflictGame := proc( r, c, A )
      local M, B1, B, X, Y, Cnst1, Cnst, Colin, Rose;
      with(LinearAlgebra) : with(Optimization) :
      #make a local copy of A that we can change
      M := Matrix( A ) : B1 := Transpose(A) : B := -A :
      X := `<,>`(seq(x[i], i = 1 ..r));
      Y := `<,>`(seq(y[i], i = 1 ..c));

      Cnst1 := {seq( (B.Y) [i] ≥ p1 − p2, i = 1 .. r) , add(y[i], i = 1 .. c) = 1};
      Cnst := { seq( (B1.X) [i] ≥ q1 − q2, i = 1 .. c), add(x[i], i = 1 .. r) = 1};
      Colin := LPSolve( p1 − p2, Cnst1, assume = nonnegative, maximize);
      Rose := LPSolve(q1 − q2, Cnst, assume = nonnegative, maximize);
      print(Rose, Colin);
  end proc:

> # Example 1 Mixed Strategy Game
> A := Matrix([[7, 3], [5, 9]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> TotalConflictGame(2, 2, A);
```

$[6., [q1 = 6., q2 = 0., x_1 = 0.500000000000000, x_2 = 0.500000000000000]], [-5.99999999756483, [p1 = 0., p2 = 5.99999999756483, y_1 = 0.749999999907759, y_2 = 0.250000000092241]]$

ثانيا: إذا كانت مصفوفة العائد من الشكل $n \times m$:

في هذه المرة نحاول إرجاع المصفوفة إلى 2×2، ويتم ذلك بإزالة الاستراتيجيات المسيطرة Removing Dominated Strategies ، في بعض الأحيان قد يتم تقليل حجم ألعاب المصفوفة الكبيرة (على أمل أن يكون حجمها 2×2) عن طريق حذف الصفوف والأعمدة التي من الواضح أنها سيئة للاعب الذي يستخدمها، نتبع الخطوتين التاليتين:

1- نستبعد الصف الذي تكون جميع عناصره أقل أو يساوي عناصر صف أخر.

2- نستبعد العمود الذي تكون جميع عناصره أكبر أو يساوي عناصر عمود أخر.

مثال7: أوجد قيمة المباراة بالنسبة للشركتين (X و Y)

	Y1	Y2	Y3
X1	3	4	7
X2	2	2	7
X3	5	8	2

حل المثال7:

نضيف عمود **Min** وصف **Max**.

	Y1	Y2	Y3	Min
X1	3	4	7	3
X2	2	2	7	2
X3	5	8	2	2
Max	5	8	7	

$$\max\min = 3 \;\;,\;\; \min\max = 5$$
$$\min\max \neq \max\min$$

لا توجد نقطة سرج في هذه الحالة، إذن اللعبة يمكن حلها باستخدام الاحتمالات (الاستراتيجية المختلطة)، أول ما نقوم به استخدام خصائص الهيمنة بالنسبة لمصفوفة المباراة.

- نستبعد الصف الثاني لأن جميع عناصر أقل أو يساوي الصف الأول، فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

- نستبعد العمود الثاني لأن جميع عناصر أكبر من العمود الأول، فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

الأن يصبح لكل لاعب استراتيجيتان، ويمكن حلها بنفس كيفية حل المثال السابق.

لكي نتوصل إلى حل للعبة الاستراتيجية وجب البحث عن استراتيجيات عشوائية ، نفرض أن اللاعب1 اختار استراتيجية 1 مع احتمال $x\,(0 \geq x)$، والاستراتيجية 2 باحتمال $(1-x)$، ونفرض أن اللاعب2 اختار استراتيجية 1 مع احتمال $y\,(0 \geq y)$، والاستراتيجية 2 باحتمال $(1-y)$، نرغب في تحديد قيمتي x و y التي تعطي الاستراتيجيات المثلى لكلا اللاعبين، إذن علينا بحساب العائد المتوقع $E(x,y)$.

$$E(x,y) = (x, 1-x)\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$
$$\therefore E(x,y) = 4xy + 6x + 3y + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

لتحويل (1) إلى جداء عاملين نستخدم الخاصية التالية:

$$axy + bx + cy = d$$
$$\therefore (ax+c)(ay+b) = ad + bc$$

نرجع إلى (1): نلاحظ أن: $a=-7\ ,\ b=5\ ,\ c=3\ ,\ d=-2$.

$$E(x,y) = -7xy+5x+3y+2 = (-7x+3)(-7y+5) = 14+15 = 29$$

$$\therefore E(x,y) = 49\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(y-\frac{5}{7}\right) = 29$$

$$\therefore E(x,y) = \left(x-\frac{3}{7}\right)\left(y-\frac{5}{7}\right) = \frac{29}{49}$$

$$\therefore E(x,y) = \left(x-\frac{3}{7}\right)\left(y-\frac{5}{7}\right) - \frac{29}{49} = 0...........(2)$$

إذن الزوج $(x,y) = \left(\frac{3}{7},\frac{5}{7}\right)$ هو نقطة سرج لـ $E(x,y)$ ، حيث: $E(x,y) = \frac{29}{7}$.

إذا كانت $x = \frac{3}{7}$ ، فعندئذ اللاعب1 يضمن عائد قدره $\frac{29}{7}$ ، وإذا اختار اللاعب1 أي قيمة لـ p ، فأن اللاعب2 يستطيع اختيار قيمة من شأنها تجعل العبارة (2) تعطي عائدا أقل من $\frac{29}{7}$.

إذا كان $x < \frac{3}{7}$ فالعبارة $\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(y-\frac{5}{7}\right)$ سالبة طالما $y > \frac{5}{7}$.

إذا كان $x > \frac{3}{7}$ فالعبارة $\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(y-\frac{5}{7}\right)$ سالبة طالما $y < \frac{5}{7}$.

وبالتالي فأن العائد المتوقع $\frac{29}{7}$ هو أفضل ما يمكن أن يفعله اللاعب1 بشرط استخدام اللاعب2 استراتيجية مثالية ، وهكذا فالاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب1 هي: $\left(\frac{3}{7},0,\frac{4}{7}\right)$.

بطريقة مماثلة نجد الاستراتيجية المثلى للاعب2 : $\left(\frac{5}{7},0,\frac{2}{7}\right)$.

العائد المتوقع للعبة هو $\frac{29}{7}$ عندما يلعب اللاعبين 1 و2 استراتيجياتهم المثلى.

التطبيق باستخدام برنامج Maple :

```
> Restart :
> with(LinearAlgebra) : with(Optimization) :
```

Total Conflict Games

```
> TotalConflictGame := proc( r, c, A)
      local M, B1, B, X, Y, Cnst1, Cnst, Colin, Rose;
      with(LinearAlgebra) : with(Optimization) :
      #make a local copy of A that we can change
      M := Matrix( A ) : B1 := Transpose(A) : B := -A :
      X := `<,>`(seq(x[i], i=1 ..r));
      Y := `<,>`(seq(y[i], i=1 ..c));

      Cnst1 := {seq((B.Y)[i] ≥ p1 - p2, i=1 .. r) , add(y[i], i=1 .. c) = 1};
      Cnst := { seq((B1.X)[i] ≥ q1 - q2, i=1 .. c), add(x[i], i=1 .. r) = 1};
      Colin := LPSolve(p1 - p2, Cnst1, assume=nonnegative, maximize);
      Rose := LPSolve(q1 - q2, Cnst, assume=nonnegative, maximize);
      print(Rose, Colin);
  end proc:
```

```
> # Example 2 Mixed Strategy Game
> A := Matrix([[3, 4, 7], [2, 2, 7], [5, 8, 2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> ra := 3;
```

$$ra := 3$$

```
> rc := 3;
```

$$rc := 3$$

```
> TotalConflictGame(ra, rc, A);
```

$[4.14285714285714, [q1 = 4.14285714285714, q2 = 0., x_1 = 0.428571428571429, x_2 = 0., x_3 = 0.571428571428571]],$

$[-4.14285714003968, [p1 = 0., p2 = 4.14285714003968, y_1 = 0.714285714035294, y_2 = 0., y_3 = 0.285714285964706]]$

مثال8: أوجد قيمة المباراة بالنسبة للشركتين (X و Y)

	Y1	Y2	Y3	Y4
X1	6	5	7	3
X2	5	7	5	7
X3	7	5	7	3
X4	3	7	3	11

حل المثال8:

نضيف عمود **Min** وصف **Max**.

	Y1	Y2	Y3	Y4	Min
X1	6	5	7	3	3
X2	5	7	5	7	5
X3	7	5	7	3	3
X4	3	7	3	11	3
Max	7	7	7	11	

$$\max\min = 5 \;,\; \min\max = 7$$
$$\min\max \neq \max\min$$

لا توجد نقطة سرج في هذه الحالة، إذن اللعبة يمكن حلها باستخدام الاحتمالات (الاستراتيجية المختلطة)، أول ما نقوم به استخدام خصائص الهيمنة بالنسبة لمصفوفة المباراة.

- نستبعد الصف الأول لأن جميع عناصر أقل أو يساوي الصف الثالث $(x_1 = 0)$، فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

- نستبعد العمود الثالث لأن جميع عناصر أكبر أو يساوي من العمود الأول $(y_3 = 0)$، فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

- نلاحظ أن: $R_2 + R_3 > R_1$ فنستبعد الصف الاول $(x_2 = 0)$، فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

- نلاحظ أن: $C_1 + C_3 > C_2$ فنستبعد العمود الثاني $(y_2 = 0)$، فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

الأن يصبح لكل لاعب استراتيجيتان، ويمكن حلها بنفس كيفية حل المثال السابق، بعد الحساب تحصلنا على الاستراتيجية المختلطة المثلى

للاعب1: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

بطريقة مماثلة نجد الاستراتيجية المثلى للاعب2 : $(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$.

العائد المتوقع للعبة هو $\frac{17}{3}$ عندما يلعب اللاعبين 1 و2 استراتيجياتهم المثلى.

التطبيق باستخدام Maple

```
> Restart :
> with(LinearAlgebra) : with(Optimization) :
```

Total Conflict Games

```
> TotalConflictGame := proc( r, c, A )
      local M, B1, B, X, Y, Cnst1, Cnst, Colin, Rose;
      with(LinearAlgebra) : with(Optimization) :
      #make a local copy of A that we can change
      M := Matrix( A ) : B1 := Transpose(A) : B := -A :
      X := `<,>`(seq(x[i], i = 1 ..r));
      Y := `<,>`(seq(y[i], i = 1 ..c));

      Cnst1 := {seq((B.Y)[i] ≥ p1 − p2, i = 1 .. r) , add(y[i], i = 1 .. c) = 1};
      Cnst := { seq((B1.X)[i] ≥ q1 − q2, i = 1 .. c), add(x[i], i = 1 .. r) = 1};
      Colin := LPSolve(p1 − p2, Cnst1, assume = nonnegative, maximize);
      Rose := LPSolve(q1 − q2, Cnst, assume = nonnegative, maximize);
      print(Rose, Colin);
  end proc:

> # Example 3 Mixed Strategy Game
> A := Matrix([[6, 5, 7, 3], [5, 7, 5, 7], [7, 5, 7, 3], [3, 7, 3, 11]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

```
> ra := 4;
```

$$ra := 4$$

```
> rc := 4;
```

$$rc := 4$$

```
> TotalConflictGame(ra, rc, A);
```

$[5.66666666666667, [q1 = 5.66666666666667, q2 = 0., x_1 = 0., x_2 = 0., x_3 = 0.666666666666667, x_4 = 0.333333333333333]],$

$[-5.66666666445288, [p1 = 0., p2 = 5.66666666445288, y_1 = 0.666666666629770, y_2 = 0., y_3 = 0., y_4$
$= 0.333333333370230]]$

9-5-3- الحل البياني للمباراة :

لا يمكن استخدام هذه الطريقة إلا في المباريات التي لا تحتوي على نقطة سرج، ولها مصفوفة عائد من الشكل $2 \times n$ أو $n \times 2$

مثال9:

نعتبر مصفوفة المثال (6) والتي تعطى كما يلي:

	B1	B2
A1	7	3
A2	5	9

المطلوب:

استخدام الطريقة البيانية في إيجاد قيمة المباراة.

حل المثال9:

يجب أن نتحقق أولا ما إذا كانت هناك استراتيجيات مثالية بحتة، لأنه في حالة وجودها لا يمكننا استخدام الطريقة البيانية: نلاحظ أن : $\max(3,5) \neq \min(7,9)$ $(v^- = 5\ ,\ v^+ = 7)$، إذن هذه اللعبة ليس لها نقطة سرج.

بعد التحقق من عدم وجود نقطة سرج، نتبع الخطوات التالية للحل:

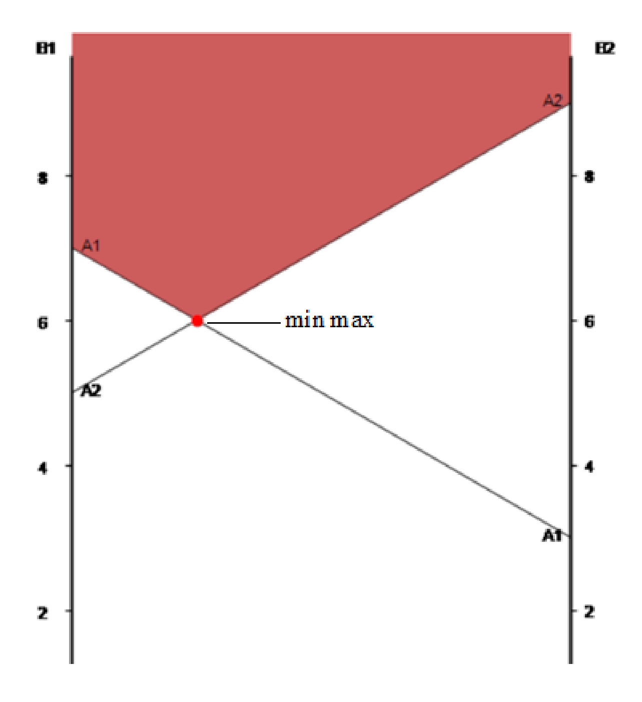
بالنسبة للاعب 1:

أولا: نرسم خطين متوازيين بمسافة وحدة واحدة ونضع علامة على مقياس لكل منهما.

يمثل الخطان المتوازيان استراتيجيات اللاعب B.

ثانيا: يتم رسم القيمة 7 على طول المحور الرأسي ضمن الإستراتيجية B1 ويتم رسم القيمة 3 على طول المحور الرأسي ضمن الإستراتيجية B2 ، ثم يتم رسم خط مستقيم يصل بين النقطتين.

وبالمثل يمكننا رسم الاستراتيجيات A2 أيضا، نوضح ذلك في الشكل التالي:



نشير إلى أدنى نقطة بـ : V في المنطقة المظللة إلى قيمة اللعبة من الشكل أعلاه ، قيمة المباراة 6 وحدات.

تحدث نقطة الحل الأمثل عند تقاطع الخطين المستقيمين E_1 و E_2 :

$$\begin{cases} E_1 = 7p_1 + 3p_2 \\ E_2 = 5p_1 + 9p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = E_2 \\ 7p_1 + 3p_2 = 5p_1 + 9p_2 \end{cases} ;\ p_1 = 1 - p_2$$

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{3}{4} \\ p_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow V = 7\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) = 6$$

كذلك تحدث نقطة الحل الأمثل عند تقاطع الخطين المستقيمين L_1 و L_2 :

$$\begin{cases} L_1 = 7q_1 + 5q_2 \\ L_2 = 3q_1 + 9q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 \\ 7q_1 + 5q_2 = 3q_1 + 9q_2 \end{cases} ;\ q_1 = 1 - q_2$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{2} \\ q_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow V = 7\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

مثال10:

نعتبر مصفوفة العائد التالية:

	B1	B2
A1	1	-3
A2	3	5
A3	-2	4
A4	4	-5

المطلوب:

استخدام الطريقة البيانية في إيجاد قيمة المباراة.

حل المثال10:

نضيف عمود **Min** وصف **Max**.

	B1	B2	Min
A1	1	-3	-3
A2	3	5	3
A3	-2	4	-2
A4	4	-5	-5
Max	4	5	

يجب أن نتحقق أولا ما إذا كانت هناك استراتيجيات مثالية بحتة، لأنه في حالة وجودها لا يمكننا استخدام الطريقة البيانية: نلاحظ أن :

$$\max\min = 3 \ , \ \min\max = 4$$
$$\min\max \neq \max\min$$

إذن هذه اللعبة ليس لها نقطة سرج.

بعد التحقق من عدم وجود نقطة سرج، نتبع الخطوات التالية للحل:

نستخدام قواعد الهيمنة لتقليل حجم مصفوفة العائد:

- نستبعد الصف الثالث لأن جميع عناصر أقل أو يساوي الصف الثاني $(x_3 = 0)$، فتصبح المصفوفة كما يلي:

	B1	B2
A1	1	-3
A2	3	5
A3	-2	4
A4	4	-5

- نستبعد الصف الأول لأن جميع عناصر أقل أو يساوي الصف الثاني $(x_1 = 0)$، فتصبح المصفوفة كما يلي:

	B1	B2
A1	1	-3
A2	3	5
A3	-2	4
A4	4	-5

مصفوفة العائد النهائية بعد الحذف:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

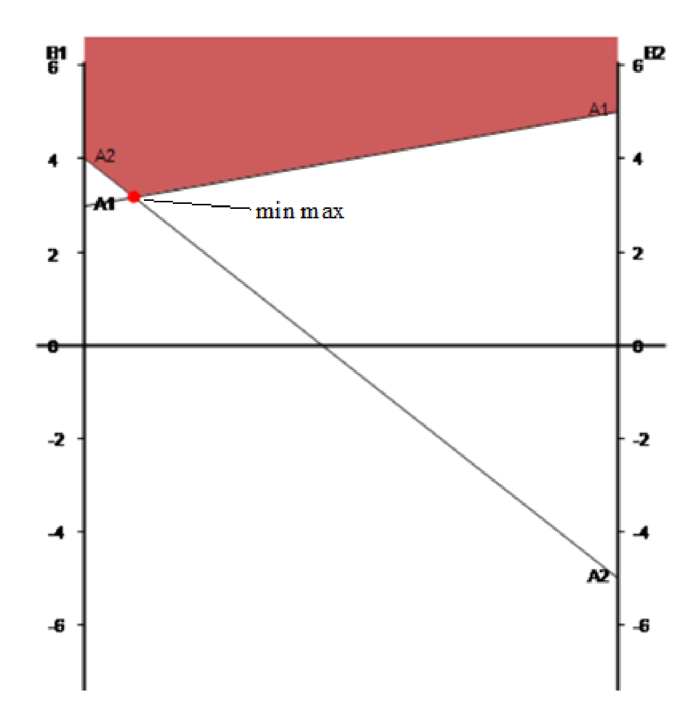
بالنسبة للاعب 1:

أولا: نرسم خطين متوازيين بمسافة وحدة واحدة ونضع علامة على مقياس لكل منهما.

يمثل الخطان المتوازيان استراتيجيات اللاعب B.

ثانيا: يتم رسم القيمة 3 على طول المحور الرأسي ضمن الإستراتيجية B1 ويتم رسم القيمة 5 على طول المحور الرأسي ضمن الإستراتيجية B2 ، ثم يتم رسم خط مستقيم يصل بين النقطتين.

وبالمثل يمكننا رسم الاستراتيجيات A2 أيضا، نوضح ذلك في الشكل التالي:



نشير إلى أدنى نقطة بـ : V في المنطقة المظللة إلى قيمة اللعبة من الشكل أعلاه ، قيمة المباراة $\frac{35}{11}$ وحدات.

تحدث نقطة الحل الأمثل عند تقاطع الخطين المستقيمين E_1 و E_2 :

$$\begin{cases} E_1 = 3p_1 + 5p_2 \\ E_2 = 4p_1 - 5p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = E_2 \\ 3p_1 + 5p_2 = 4p_1 - 5p_2 \end{cases} ; \; p_1 = 1 - p_2$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{10}{11} \\ p_2 = \frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow V = 3\left(\frac{10}{11}\right) + 5\left(\frac{1}{11}\right) = \frac{35}{11}$$

كذلك تحدث نقطة الحل الأمثل عند تقاطع الخطين المستقيمين L_1 و L_2 :

$$\begin{cases} L_1 = 3q_1 + 4q_2 \\ L_2 = 5q_1 - 5q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 \\ 3q_1 + 4q_2 = 5q_1 - 5q_2 \end{cases} ;\ q_1 = 1 - q_2$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{9}{11} \\ q_2 = \dfrac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow V = 3\left(\frac{9}{11}\right) + 4\left(\frac{2}{11}\right) = \frac{35}{11}$$

9-6- حل مصفوفة المباراة عن طريق البرمجة الخطية:

نظرية الألعاب لها علاقة قوية بالبرمجة الخطية، بمعنى أنه يمكن التعبير عن أي لعبة لشخصين محصلتها صفر كبرنامج خطي والعكس صحيح، صرح دانتزيغ (1963) أن فون نيومان أبو نظرية اللعبة عندما قدم لأول مرة لطريقة simplex في عام 1947 أدرك على الفور هذه العلاقة وشدد على مفهوم الثنائية (النموذج المقابل) في البرنامج الخطي.

يمكن حل أي لعبة بشرط أن تكون ذات استراتيجيات مختلطة وذلك بتحويلها إلى مسألة برمجة خطية، يتطلب هذا التحول تطبيق مبرهنة minimax واستخدام تعريفات maximin(v^-) و minimax (v^+).

بخصوص مبرهنة minimax يمكن للاعب الصف (من خلال لعب إستراتيجية مثالية) ضمان أن عائده المتوقع سيساوي على الأقل قيمة اللعبة، وبالمثل يمكن للاعب العمود (من خلال لعب إستراتيجية مثالية) ضمان ألا تتجاوز خسائره المتوقعة قيمة اللعبة، إن الاستراتيجيات المثلى التي يتم الحصول عليها من خلال البرمجة الخطية تمثل توازنا مستقرا ، لأنه لا يمكن لأي لاعب تحسين وضعه من خلال تغيير أحادي في الإستراتيجية.

مثال11:

	B1	B2	B3
A1	7	20	10
A2	8	7	12
A3	-3	2	4

المطلوب: أوجد قيمة المباراة بالنسبة للشركتين (A و B) باستخدام البرمجة الخطية.

حل المثال11:

	B1	B2	B3	Min
A1	7	20	10	7
A2	8	7	12	7
A3	-3	2	4	-3
Max	8	20	12	

$$\max\min = 7 \quad , \quad \min\max = 8$$

$$\min\max \neq \max\min$$

لا توجد نقطة سرج في هذه الحالة، إذن اللعبة يمكن حلها باستخدام الاحتمالات (الاستراتيجية المختلطة ويمكن تطبيق تقنية البرمجة الخطية)، أول ما نقوم به استخدام خصائص الهيمنة بالنسبة لمصفوفة المباراة.

- نستبعد الصف الثالث لأن جميع عناصر أقل أو يساوي الصف الثاني، فتصبح المصفوفة كما يلي:

	B1	B2	B3
A1	7	20	10
A2	8	7	12
A3	-3	2	4

- نستبعد العمود الثالث لأن جميع عناصر أكبر من العمود الأول، فتصبح المصفوفة كما يلي:

	B1	B2	B3
A1	7	20	10
A2	8	7	12
A3	-3	2	4

المصفوفة النهائية بعد تطبيق قواعد الهيمنة هي كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

الأن يصبح لكل لاعب استراتيجيتان، لكل نحلها باستخدام تقنية البرمجة الخطية نتبع الخطوات التالية:

p_2, p_1 احتمالات اختيار الاستراتيجيات A_2, A_1 على التوالي.

q_2, q_1 احتمالات اختيار الاستراتيجيات B_2, B_1 على التوالي.

هدف اللاعب A هو تعظيم العوائد المتوقعة، والتي يمكن تحقيقها من خلال v ، أي أنه قد يكسب أكثر من v إذا تبنى اللاعبB استراتيجية سيئة، العائد المتوقع للاعب A يكون على النحو الاتي:

$$\begin{cases} 7p_1 + 8p_2 \geq v \\ 20p_1 + 7p_2 \geq v \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

نقسم أطراف المتباينات على v، فتصبح (1) كالتالي:

$$\begin{cases} 7\left(\frac{p_1}{v}\right)+8\left(\frac{p_2}{v}\right)\geq 1 \\ 20\left(\frac{p_1}{v}\right)+7\left(\frac{p_2}{v}\right)\geq 1 \end{cases} \quad ....(2)$$

لتبسيط (2) نضع: $\left(x_2=\frac{p_2}{v}, x_1=\frac{p_1}{v}\right)$.

من أجل تعظيم v يمكن للاعب A تدنية $\frac{1}{v}$:

$$Min\ Z_p=\frac{1}{v} \ = \ x_1+x_2$$

$$S/C \begin{cases} 7x_1+8x_2\geq 1 \\ 20x_1+7x_2\geq 1 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

هدف اللاعب B هو تدنية خسائره المتوقعة، والتي يمكن تحقيقها من خلال تدنية v ، أي أن اللاعب A إذا تبنى استراتيجية سيئة ستكون الخسارة المتوقعة للاعب B على النحو الاتي:

$$\begin{cases} 7q_1+20q_2\leq v \\ 8q_1+7q_2\leq v \end{cases} \quad ....(3)$$

نقسم أطراف المتباينات على v، فتصبح (3) كالتالي:

$$\begin{cases} 7\left(\frac{q_1}{v}\right)+20\left(\frac{q_2}{v}\right)\leq 1 \\ 8\left(\frac{q_1}{v}\right)+7\left(\frac{q_2}{v}\right)\leq 1 \end{cases} \quad ....(4)$$

لتبسيط (4) نضع: $\left(y_2 = \frac{q_2}{v}, y_1 = \frac{q_1}{v} \right)$.

من أجل تدنية v يمكن للاعب B تعظيم $\frac{1}{v}$:

$$Max\ Z_q = \frac{1}{v} = y_1 + y_2$$
$$S/C \begin{cases} 7y_1 + 20y_2 \le 1 \\ 8y_1 + 7y_2 \le 1 \quad ....(5) \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

لنقوم بحل البرنامج (5) بطريقة البرمجة الخطية.

أولا نقوم بتحويل الشكل القانوني إلى شكل معياري وذلك بإضافة متغيرات وهمية مكملة S_1 و S_2 ، فيكون النموذج كما يلي:

$$Max\ Z_q = \frac{1}{v} = y_1 + y_2$$
$$S/C \begin{cases} 7y_1 + 20y_2 + S_1 = 1 \\ 8y_1 + 7y_2 + S_2 = 1 \quad ....(6) \\ y_1, y_2, S_1, S_2 \ge 0 \end{cases}$$

جدول رقم1:

CB	Cj	15	10	0	0	الحل
	BV	Y1	Y2	S1	S2	$b = x_B$
0	S1	7	20	1	0	1
0	S2	8	7	0	1	1
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	0	0	0	0	Z=0
	Zj-Cj	-1	-1	0	0	

الجدول النهائي:

CB	Cj	15	10	0	0	الحل
	BV	Y1	Y2	S1	S2	$b = x_B$
1	y2	0	1	8/111	-7/111	$\frac{1}{111}$
1	y1	1	0	-7/111	20/111	$\frac{13}{111}$
	$Z_j = \sum CB_i a_{ij}$	1	1	1/111	13/111	$Z = \frac{14}{111}$
	Zj-Cj	0	0	1/111	13/111	

نلاحظ أن $Z_j - C_j \geq 0$ ، فأن هذا الجدول يمثل الحل النهائي، والحل الأمثل نجده في عمود الحل، أي: $\left\{ y_1 = \frac{13}{111} \ , \ y_2 = \frac{1}{111} \ , \ Z = \frac{14}{111} \right\}$.

$$Z_q = \frac{1}{v} = \frac{14}{111} \Rightarrow v = \frac{111}{14}$$

$$q_1 = v \cdot y_1 = \frac{111}{14} \cdot \frac{13}{111} = \frac{13}{14}$$
$$q_2 = v \cdot y_2 = \frac{111}{14} \cdot \frac{1}{111} = \frac{1}{14}$$

الاستراتيجية المثلى للاعب B هي: $\left(\frac{13}{14}, \frac{1}{14} \right)$.

لإيجاد x_1, x_2 استخدمنا البرنامج الثنائي (المقابل) من الجدول النهائي السابق.

$$p_1 = v \cdot x_1 = \frac{111}{14} \cdot \frac{1}{111} = \frac{1}{14}$$
$$p_2 = v \cdot x_2 = \frac{111}{14} \cdot \frac{13}{111} = \frac{13}{14}$$

الاستراتيجية المثلى للاعب A هي: $\left(\frac{1}{14},\frac{13}{14}\right)$.

الاستراتيجية النهائية للاعبين:

$$(A_1, A_2, A_3) = \left(\frac{1}{14},\frac{13}{14},0\right)$$
$$(B_1, B_2, B_3) = \left(\frac{13}{14},\frac{1}{14},0\right)$$

9-7- الحل الأمثل للألعاب الثنائية ذات المجموع غير الصفري optimal solution of two-Person Non- Zero-sum games:

في الفقرات السابقة عند تطرقنا للألعاب ذات المجموع الصفري أن ما يربحه(يخسره) اللاعب الأول هو بالضبط ما يخسره (يربحه) اللاعب الثاني، هذه الألعاب تعتبر حالة خاصة من الألعاب الثنائية، فليس بالضرورة من يربحه اللاعب الأول هو خسارة بالنسبة للاعب الثاني، فالألعاب الثنائية ذات المجموع غير الصفري أقرب للواقع ولها تطبيقات كثيرة في الاقتصاد.

الشكل العادي (للعائد) من لعبة بين شخصين يتم تمثيلها على شكل مصفوفة ثنائية Bimatrix تكون على النحو الاتي:

$$(A,B) = \left[\left(a_{ij}, b_{ij}\right)\right]$$

فرضا لدينا مصفوفة من النوع 2×2، تمثيلها يكون على النحو الاتي:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

يمكن إجراء الفصل بين قيم اللاعبين من خلال المصفوفتين التاليتين:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \;,\; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

تسمى المصفوفة A مصفوفة العائد للاعب1، وتسمى المصفوفة B مصفوفة العائد للاعب2.

أما عن طريقة حل هذا النوع نتبع الخطوات التالية:

a_{ij} هو الحد الأقصى في العمود j من المصفوفة A ، نضع خط تحت هذه القيمة a_{ij} أو دائرة حولها أو تلوينها.

b_{ij} هو الحد الأقصى في الصف i من المصفوفة B ، نضع خط تحت هذه القيمة b_{ij} أو دائرة حولها أو تلوينها.

إذا كانت المصفوفة تحتوي على خلية واحدة أو أكثر مشتركة (في التلوين أو في التسطير)، فهذا يعني أن المباراة لها توازن (توازن ناش) خاص بالاستراتيجية البحتة ، وإلا فإن المباراة لها توازن خاص بالاستراتيجية المختلطة.

9-7-1- توازن ناشNash Equilibrium :

هو مفهوم لنظرية الألعاب الذي يحدد الحل الأمثل في الألعاب غير التعاونية –Non cooperative Games حيث يفتقر كل لاعب إلى أي حافز لتغيير استراتيجيته الأولية، في ظل توازن ناش لا يكسب اللاعب أي شيء من الانحراف عن استراتيجيته المختارة في البداية ، بافتراض أن اللاعبين الأخرين أيضا يحافظون على استراتيجياتهم دون تغيير، قد تتضمن اللعبة عدة توازنات ناش ، توازن ناش يصور السلوك والتفاعلات بين المشاركين في اللعبة لتحديد أفضل النتائج، كما يسمح بالتنبؤ بقرارات اللاعبين إذا كانوا يتخذون القرارات في نفس الوقت وقرار أحد اللاعبين يأخذ في الاعتبار قرارات اللاعبين الأخرين.

مبرهنة (ناش): كل مصفوفة ثنائية Bimatrix لها زوج توازن واحد على الأقل.

أولا: حالة الاستراتيجية البحتة:

مثال12:

هناك شركتين متنافستين: الشركة A والشركة B ترغب الشركتان في تحديد ما إذا كان ينبغي إطلاق حملة إعلانية جديدة لمنتجاتهما.
إذا بدأت كلتا الشركتين في الإعلان فستجذب كل شركة 200 زبون جديد، وإذا قررت شركة واحدة فقط الإعلان فستجذب 400 زبون جديد ، بينما لن تجذب الشركة الأخرى أي زبون جدد، إذا قررت كلتا الشركتين عدم الإعلان فلن تجلب أي من الشركتين زبائن جدد، نوضح ذلك في جدول العائد أدناه:

A \ B	الاعلان	عدم الاعلان
الاعلان	$(200,200)$	$(400,0)$
عدم الاعلان	$(0,400)$	$(0,0)$

المطلوب: أوجد توازن ناش؟

حل المثال12:

نفصل المصفوفة الثنائية Bimatrix إلى مصفوفتين A و B .

A=

	الاعلان	عدم الاعلان
الاعلان	200	400
عدم الاعلان	0	0

B=

	الاعلان	عدم الاعلان
الاعلان	200	0
عدم الاعلان	400	0

بالنسبة للمصفوفة A:

$a_{11} = 200$ أكبر قيمة في العمود الأول.

$a_{12} = 400$ أكبر قيمة في العمود الثاني.

بالنسبة للمصفوفة B:

$b_{11}=200$ أكبر قيمة في الصف الأول.

$b_{21}=400$ أكبر قيمة في الصف الثاني.

نلاحظ أن الخلية (a_{11},b_{11}) هي المشتركة بين المصفوفتين A و B ، إذن الزوج: (A_1,B_1) هو توازن ناش، وعائده هو: $(200,200)$.

يجب أن تعلن الشركة "A" عن منتجاتها لأن الإستراتيجية توفر عائدا أفضل من خيار عدم الإعلان، نفس الموقف موجود بالنسبة للشركة "B"، وبالتالي فإن السيناريو الذي تعلن فيه الشركتان عن منتجاتهما هو توازن ناش.

مثال13:

معضلة السجين PRISONER'S DILEMMA : قام شخص x وشخص أخر y بسرقة أحد البنوك وتم القبض عليهما ثم تم استجوابهم بشكل منفصل، لدى x و y خيار الاعتراف (الحركة C) أو البقاء صامتين (الحركة S).
لدى الشرطة القليل من الأدلة، وإذا التزم كلاهما الصمت، فسيتم الحكم عليهما بالسجن لمدة عام ، لذلك يقترح محققو الشرطة صفقة: إذا اعترف أحدهم وبقي الأخر صامت ، يُطلق سراح الشخص الذي يعترف بينما يُحكم على الأخر بالسجن ثلاث سنوات، ومع ذلك إذا تحدث كلاهما ، كلاهما سيظل محكوما عليهما بالسجن لمدة عامين إذا كان عائد كل لاعب 3 مطروحا منها عدد سنوات المكوث في السجن ، نحصل على العوائد التالية المبينة في المصفوفة الثنائية bimatrix :

	S	C
S	$(2,2)$	$(0,3)$
C	$(3,0)$	$(1,1)$

المطلوب: أوجد توازن ناش؟

حل المثال13:

نفصل المصفوفة الثنائية Bimatrix إلى مصفوفتين A و B .

		S	C
A=	S	2	0
	C	3	1

		S	C
B=	S	2	3
	C	0	1

بالنسبة للمصفوفة A:

$a_{21}=3$ أكبر قيمة في العمود الأول.

$a_{22}=1$ أكبر قيمة في العمود الثاني.

بالنسبة للمصفوفة B:

$b_{12}=3$ أكبر قيمة في الصف الأول.

$b_{22}=1$ أكبر قيمة في الصف الثاني.

نلاحظ أن الخلية (a_{22},b_{22}) هي المشتركة بين المصفوفتين A و B، إذن الزوج: (C,C) هو توازن ناش، وعائده هو: $(1,1)$.

ثانيا: حالة الاستراتيجية المختلطة:

مثال14:

إذا كانت لدينا المصفوفة الثنائية التالية:

$$M=\begin{pmatrix}(8,-12) & (4,8)\\ (4,4) & (8,-4)\end{pmatrix}$$

المطلوب: إيجاد توازن ناش.

حل المثال14:

نفصل المصفوفة الثنائية Bimatrix إلى مصفوفتين A و B .

		N	L
A=	**S**	8	4
	T	4	8

		N	L
B=	S	-12	8
	T	4	-4

بالنسبة للمصفوفة A:

$a_{11}=8$ أكبر قيمة في العمود الأول.

$a_{22}=8$ أكبر قيمة في العمود الثاني.

بالنسبة للمصفوفة B:

$b_{12}=8$ أكبر قيمة في الصف الأول.

$b_{21}=4$ أكبر قيمة في الصف الثاني.

نلاحظ عدم وجود خلية ملونة (مُعلمة) مشتركة بين المصفوفتين A و B ، إذن هذه المباراة ليس لها توازن ناش بحتا ، نبحث عن توازن ناش خاص بالاستراتيجية المختلطة باستخدام الاحتمالات.

ليكن p احتمال خاص باللاعب 1 عند لعبه باستراتيجية S، و q احتمال خاص باللاعب 2 عند لعبه باستراتيجية N ، من خلال توازن ناش الخاص بالاستراتيجية المختلطة هدفنا إيجاد p و q ، توازن ناش في الاستراتيجية المختلطة يجب أن يحصل كلا اللاعبين على نفس العوائد المتوقعة.

بالنسبة للاعب 1:

إذا لعب S سيحصل على عائد 8 مع احتمال q و 4 مع احتمال (1−q)، لذلك فأن العائد المتوقع $E(S)$ من لعب S هو: $8q+4(1-q)$.

إذا لعب T سيحصل على عائد 4 مع احتمال q و 8 مع احتمال (1−q)، لذلك فأن العائد المتوقع $E(T)$ من لعب S هو: $4q+8(1-q)$.

$$E(S)=8q+4(1-q)$$
$$E(T)=4q+8(1-q)$$

إذا كانت استراتيجيات المكاسب (العوائد) المتوقعة متساوية:

$$E(S)=E(T)\Rightarrow 8q+4(1-q)=4q+8(1-q)$$
$$\therefore 4q=4\Rightarrow q=\frac{1}{2}\Rightarrow (1-q)=\frac{1}{2}$$

بالنسبة للاعب2:

إذا لعب N سيحصل على عائد −12 مع احتمال p و 4 مع احتمال (1−p)، لذلك فأن العائد المتوقع $E(N)$ من لعب S هو: $-12p+4(1-p)$.

إذا لعب L سيحصل على عائد 8 مع احتمال p و −4 مع احتمال (1−p)، لذلك فأن العائد المتوقع $E(L)$ من لعب S هو: $8q-4(1-p)$.

$$E(N)=-12p+4(1-p)$$
$$E(L)=8q-4(1-p)$$

إذا كانت استراتيجيات المكاسب (العوائد) المتوقعة متساوية:

$$E(N)=E(L)\Rightarrow -12p+4(1-p)=8q-4(1-p)$$
$$\therefore -28p=-8\Rightarrow p=\frac{2}{7}\Rightarrow(1-p)=\frac{5}{7}$$

ماذا عن عوائد توازن ناش بالنسبة للاستراتيجيات المختلطة؟

العائد المتوقع للاعب1 : $8\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)+8\left(\frac{1}{2}\right)=6$

العائد المتوقع للاعب2 : $-12\left(\frac{2}{7}\right)+4\left(\frac{5}{7}\right)=8\left(\frac{2}{7}\right)-4\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{-4}{7}$

9-7-2- أمثلية باريتو[1] Pareto optimality :

أمثلية باريتو أو كفاءة باريتو Pareto Efficiency هو مقياس لكفاءة المباراة، تعتبر نتيجة اللعبة مثالية لـ Pareto إذا كان ليس بالإمكان تحسين عائد لاعب بدون تقليل عائد منافسيه (بعبارة أخرى إذا تمكن لاعب واحد على الأقل من الحصول على عائد أكبر بشرط عدم تقليل أرباح أي لاعب أخر)، في كثير من الأحيان لا يكون توازن ناش هو باريتو الأمثل.

مثال15:

إذا كانت لدينا المصفوفة الثنائية التالية:

		S	T
M =	S	$(360,360)$	$(344,368)$
	T	$(368,344)$	$(352,352)$

[1] - تمت تسمية هذا المفهوم على إسم **فيلفريدو باريتو Vilfredo Pareto (1848-1923)** ، مهندس مدني وخبير اقتصادي إيطالي ، استخدم هذا المفهوم في دراساته حول الكفاءة الاقتصادية وتوزيع الدخل.

(T,T) هو توازن ناش وعائده (352،352) ، (S,S) ليس توازن ناش لأنه لدى A حافز للتبديل نحو T .

لا يمكن الوصول إلى نتيجة (S,S) في ظل السلوك العقلاني، على سبيل المثال، عندما يقوم اللاعبون بالتحسين بشكل فردي، هناك حاجة أخرى للسماح بمثل هذه النتائج.

بفرض أننا أضفنا شعاع (352,360) ، هذا الشعاع هو على الأقل أفضل من (352,352)، يكون العائد من لاعب واحد على الأقل أفضل من خلال اختيار (352,360) مقارنة بالعائد (352,352).

إذن شعاع العائد (352,360) مهيمن على شعاع العائد (352,352).

تعريف:

عائد الشعاع (x_1, y_1) يهيمن (يسيطر) على عائد شعاع أخر (x_2, y_2) إذا كانت جميع الشروط التالية صحيحة:

$$1)\ x_1 \geq x_2$$
$$2)\ y_1 \geq y_2$$

تعريف:

يعتبر زوج الاستراتيجيات باريتو الأمثل إذا كان شعاع عائد هذا الزوج لا يهيمن عليه شعاع العائد لأي زوج أخر من الاستراتيجيات.

بالنسبة للمثال السابق نجد:

(S,S) ، (S,T) ، (T,S) هي استراتيجيات باريتو الأمثلية، توازن ناش البحت ليس باريتو الأمثل (من المثير للاهتمام أن هذا هو الزوج الاستراتيجي الوحيد الذي لا يعتبر باريتو الأمثل).

كيف يمكن للاعبين الوصول إلى نتيجة باريتو المثلى؟ ممكن تبينها في النقاط التالية:

- يجب عليهم توقيع عقد ملزم قبل المباراة.
- إذا لم يكن هناك مثل هذا العقد، فقد يكون لدى بعض اللاعبين حافز للتبديل نحو استراتيجية أخرى (نظرا لأن استراتيجية باريتو المثلى لا تحتاج أن تكون توزان ناش الخالص (البحت).
- تُوفر بعض استراتيجيات باريتو المثلى نتائج جيدة لكلا اللاعبين .

مثال16:

بخصوص المثال السابق، يكون الزوج الاستراتيجي (S,S) مع العائد (360,360) أفضل لكلا اللاعبين من الزوج الاستراتيجي (T,T) مع عائد (352,352) .

هناك مصطلح social optimality (الأمثلية الاجتماعية) مستخدم كذلك في نظرية الألعاب.

تعريف:

الزوج الاستراتيجي (α, β) يعتبر أمثلية اجتماعية أو رفاهية اجتماعية معظمة ، إذا كان أكبر قيمة من خلال تعظيم مجموع عوائد اللاعبين.

مثال17:

الزوج (S,S) مع عائد (360,360) ، هو الوحيد الذي يعتبر أمثلية اجتماعية مع مجموع 720.

نتيجة:

- كل أمثلية اجتماعية هي باريتو أمثلي والعكس ليس بالضرورة صحيح، (344,368) باريتو أمثلي لكن ليس أمثلية اجتماعية.
- لا يلزم أن يكون توازن ناش هو باريتو الأمثل.

9-7-3- الفرق بين توازن ناش وباريتو الأمثل:

توازن ناش (N.E) هو مفهوم الحل العام في نظرية الألعاب وهي حالة المباراة عندما لا يرغب أي لاعب في الانحراف عن الاستراتيجية التي يلعبها نظرا لأن الأخرين لا يغيرون استراتيجيتهم.

"أمثلية باريتو" هو مفهوم الكفاءة، لذلك لن تكون حالة هذه الأمثلية إذا تمكن لاعب واحد على الأقل من الحصول على عائد أكبر وتم تقليل أرباح لاعب أخر، هناك العديد من الأمثلة على توازنات ناش التي ليست باريتو الأمثل، يمكن أن يكون المثال الأكثر شهرة هو: **معضلة السجين** ، لكن يوجد القليل الذي يبين العكس (أي التساوي بينهما) والذي نوضحه في المثال التالي:

تطبيق1 : لعبة الاستثمار في التكنولوجيا:

شركتي الازدهار و الأمل المختصتان في إنتاج المعجنات الغذائية ، تريدان الاستثمار في التكنولوجيا الحديثة في هذه الصناعة قصد تحقيق مزيد من الأرباح ، فيجب على الشركتين اختيار ما إذا كانا يستثمران كثيرا أو قليلا في هذه التكنولوجيا.

- التكنولوجيا باهظة الثمن ولكن إذا كان أحدهم يستثمر كثيرا سيحقق المزيد من الأرباح والعكس إذا استثمر القليل.
- إذا قام كلاهما بالاستثمار القليل من التكنولوجيا فستربح الازدهار 14000 مليون دج و الأمل 10000 مليون دج.
- إذا كانت الازدهار تستثمر الكثير من التكنولوجيا و الأمل تستثمر القليل، فإن الازدهار ستربح 25000 مليون دج و الأمل 5000 مليون دج والعكس صحيح.
- إذا قام كلاهما بالاستثمار بكثافة ، تحقق الازدهار 24000 مليون دج و الأمل تحقق 18000 مليون دج.

نحصل على العوائد التالية المبينة في المصفوفة الثنائية bimatrix :

	S القليل	C الكثير
S القليل	$(14000,10000)$	$(5000,25000)$
C الكثير	$(25000,5000)$	$(24000,18000)$

المطلوب:

1- أوجد توازن ناش؟

2- أوجد باريتو الأمثل؟

3- أوجد الأمثلية الاجتماعية ؟

حل التطبيق1:

1- إيجاد توازن ناش:

نفصل المصفوفة الثنائية Bimatrix إلى مصفوفتين A و B .

A=		S	C
	S	14000	5000
	C	25000	24000

B=		S	C
	S	10000	25000
	C	5000	18000

بالنسبة للمصفوفة A:

$a_{21} = 25000$ أكبر قيمة في العمود الأول.

$a_{22} = 24000$ أكبر قيمة في العمود الثاني.

بالنسبة للمصفوفة B:

$b_{12} = 25000$ أكبر قيمة في الصف الأول.

$b_{22} = 18000$ أكبر قيمة في الصف الثاني.

نلاحظ أن الخلية (a_{22}, b_{22}) هي المشتركة بين المصفوفتين A و B، إذن الزوج: (C, C) هو توازن ناش، وعائده هو : $(24000,18000)$.

2- إيجاد باريتو الأمثل:

يعتبر زوج الاستراتيجيات باريتو الأمثل إذا كان شعاع عائد هذا الزوج لا يهيمن عليه شعاع العائد لأي زوج أخر من الاستراتيجيات.

(S,C) ، (C,S) ، (C,C) هي استراتيجيات باريتو الأمثلية.

3- **الأمثلية الاجتماعية:** هي أكبر قيمة من خلال تعظيم مجموع عوائد اللاعبين ، الزوج (C,C) مع عائد $(24000,18000)$، هو الوحيد الذي يعتبر أمثلية اجتماعية مع مجموع 42000 مليون دج.

تطبيق2:

أجب بنعم أو لا، مع التعليل وتصحيح الخطأ إن وجد.

س1: في مباراة ثنائية يكون توازن ناش هو النتيجة التي تعظم مجموع عوائد اللاعبين؟

س2: في توازن ناش في مباراة ثنائية ، يجب أن يكون كلا اللاعبين قد اختار استراتيجية مهيمنة؟

س 3: اللعب المتكرر لمعضلة السجين يؤدي (لا يؤدي) إلى حل تعاوني.

حل التطبيق2:

ج1: خطأ، معضلة السجين، لا يؤدي توازن ناش إلى زيادة المنفعة.

ج2: خطأ، الإستراتيجية المهيمنة هي أفضل استجابة بغض النظر عما يفعله اللاعب الأخر، توازن ناش هو التوازن الذي يلعب فيه اللاعبان الإستراتيجية المثلى بالنظر إلى

إستراتيجية اللاعب الأخر، إذا كان كلا اللاعبين يلعبان إستراتيجية مهيمنة فيجب أن يكون هذا هو توازن ناش ، ولكن ليس العكس.

ج 3: صحيح، وسيعتمد ما إذا كان التعاون مستداما أم لا على الفترة الزمنية ، والمنفعة النسبية للتعاون ، ومدى تقدير اللاعبين للمستقبل.

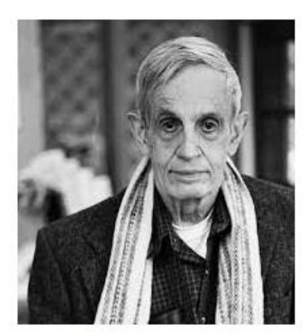
الأعلام المذكورة في الفصل التاسع:

إميل بوريل
Édouard Justin Émile Borel
1956 - 1871

إرنيست زيرميلو
Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
1953 - 1871

أوسكار مورجنسترن
Oskar Morgenstern
(1977 -1902)

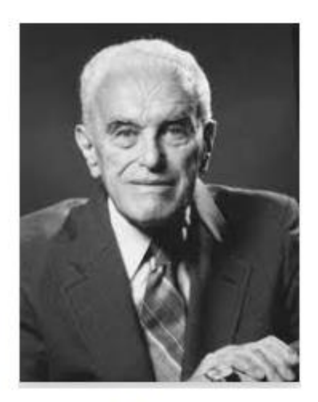
جون فون نيومان
John von Neumann
(1957 – 1903)



جون فوربس ناش
John Forbes Nash
(2015 -1928)

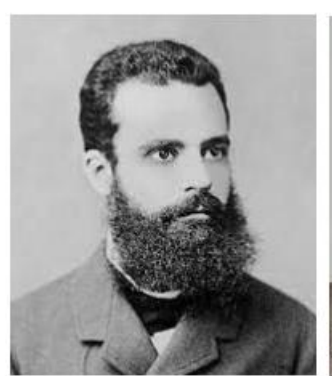
جورج برنارد دانتزيغ
George Bernard Dantzig
1914 - 2005

ديفيد جيل
David Gale
2008 – 1921



جون هارساني
Harsányi János
2000 - 1920

رينهارد سولتن
Reinhard Selten
2016 - 1930



فيلفريدو باريتو
Vilfredo Pareto
(1923-1848)

الفصل العاشر : نظرية اتخاذ القرارDECISION THEORY

تمهيد:

كان اتخذا القرار قديما يعتمد بالدرجة الأولى على الخبرة وفطانة صاحب القرار، أما اليوم فقد حدثت أمور جديدة بعد تطور العلوم الرياضياتية والمعلوماتية، فأخذ هذا القرار منحى أخر في هذه العملية ، إذ يتعين على الإدارة اتخاذ القرارات السليمة بعد استخدام هذه الأدوات.

فقد تتعامل الادارة مع مواقف معينة بحيث يكون لديها معلومات كاملة/ غير كاملة ، أو تكون في موضع اتخاذ قرار في ظل اليقين/ عدم اليقين، فمعظم المديرين يقومون باستثمارات مالية كبيرة وقرارات أخرى تتعلق بالإنتاج والتسويق وما إلى ذلك مع توفر المعلومات الكاملة، في حالة أن تكون لدينا معلومات غير كاملة نظرية القرار تقدم لنا نهجا عقلانيا في التعامل مع مثل هذه الظروف ، وبمساعدة هذه النظرية يمكن اتخاذ أفضل قرار ممكن في ظل موقف معين.

10-1- مدخل نظرية اتخاذ القرار DECISION THEORY APPROACH:

من المفيد للمؤسسة اتخاذ موقف حقيقي من الحياة وربطه بالخطوات التي ينطوي عليها اتخاذ القرارات، لنأخذ حالة المؤسسة الصناعية التي تهتم بزيادة إنتاجها لتلبية الطلب المتزايد في السوق.

الخطوة الأولى: تحديد كل البدائل الممكنة:

سرد جميع البدائل القابلة للتطبيق المتاحة في موقف معين، تتوفر الخيارات التالية للمؤسسة الصناعية ما يلي:

أ- توسيع مرافق التصنيع القائمة (التوسع)؛

ب- إنشاء مصنع جديد (مرافق جديدة)؛

ج- إشراك الشركات الصناعية الأخرى للإنتاج له بقدر الطلب الإضافي (التعاقد من الباطن).

الخطوة الثانية: تحديد السيناريو المستقبلي:

من الصعب جدا تحديد الأحداث الدقيقة التي قد تحدث في المستقبل، ومع ذلك من الممكن سرد كل ما يمكن أن يحدث، الأحداث المستقبلية ليست تحت سيطرة صانع القرار في نظرية القرار يسمى تحديد الأحداث المستقبلية بحالة الطبيعة، في حالة أنه لدينا مؤسسة صناعية معينة يمكننا تحديد الأحداث المستقبلية التالية:

أ- ارتفاع الطلب؛

ب- طلب معتدل؛

ج- انخفاض الطلب؛

د- لا يوجد طلب.

الخطوة الثالثة: تشكيل مصفوفة الدفع:

على صانع القرار أن يكتشف المكاسب المحتملة من حيث الأرباح إن وجدت للأحداث المحتملة التي تحدث في المستقبل، إن وضع كل البدائل معا (الخطوة الأولى) وبحالة الطبيعة (الخطوة الثانية) يعطينا مصفوفة الدفع والتي تكون كالتالي:

البدائل	حالة الطبيعة			
	طلب مرتفع	طلب متوسط	طلب منخفض	لا يوجد طلب
توسع	3	6	9	12
اضافة مرافق جديدة	15	18	21	24
التعاقد من الباطن	27	30	33	36

الخطوة الرابعة: تحديد البديل الأفضل:

صانع القرار سيختار بالطبع أفضل مسار للعمل من حيث المردود، ومع ذلك يجب أن يكون مفهوما أن القرار قد لا يعتمد على العائد الكمي البحت من حيث الربح وحده ، فقد يأخذ صانع القرار في الاعتبار الجوانب النوعية الأخرى مثل الشهرة المتولدة والتي يمكن صرفها في المستقبل ، مما يزيد من حصتها في السوق مع التركيز على سياسة تسعير مصممة خصيصا والتي تعطي أرباحا للشركة في النهاية .

10-2- بيئة اتخاذ القرار:

يواجه صانع القرار المواقف التالية أثناء اتخاذ القرارات:

أ- القرار في ظل ظروف اليقين Decision under conditions of certainty

هو الوضع التي يفترض فيه توفر معلومات كاملة عن بيئة الأعمال المستقبلية لصانع القرار، من السهل جدا اتخاذ قرارات جيدة للغاية، حيث لا يوجد أي شك، لكن في الحياة الواقعية، مثل هذه المواقف غير متوفرة أبدا.

ب-القرار في ظل ظروف عدم اليقين Decision under conditions of uncertainty :

حالة الأحداث المستقبلية غير معروفة، مع تزايد هذه الشكوك يصبح الوضع أكثر تعقيدا، لا يمتلك صانع القرار معلومات كافية ولا يمكنه تعيين احتمالات لأحداث مختلفة.

ج- **القرار في ظل المخاطرة Decision under risk :**

هناك عدد من الحالات الطبيعية مثل الحالة المذكورة أعلاه، الاختلاف الوحيد هو أن صانع القرار لديه معلومات كافية ويمكنه تخصيص الاحتمالات لمختلف حالات الطبيعة، أي أنه يمكن قياس المخاطر.

10-2-1- القرار في ظل ظروف اليقين:

هنا اتخاذ القرارات تكون في حالة المعرفة الكاملة لطبيعة الظروف المستقبلية ، لنأخذ مثالا بسيطا:

إذا كان لدى الشركة معلومات كاملة عن أن الطلب سيكون مرتفعا: سيكون لديها ثلاثة بدائل للتوسع، وبناء مرافق إضافية، والتعاقد من الباطن، أي بديل واحد يعطي أفضل عائد ، فالقول أن بناء مرافق إضافية يمكن انتقاؤه للحصول على أقصى فائدة، لذا فإن مهمة صانع القرار بسيطة فقط للحصول على أفضل عائد في عمود حالة الطبيعة (ارتفاع الطلب ، انخفاض الطلب ، عدم وجود طلب) واستخدام البديل المرتبط (توسيع ، إضافة مرافق ، عقد من الباطن) .

10-2-2- القرار في ظل عدم اليقين:

نعلم أن صاحب القرار في الوقت الحاضر غير قادر على الحصول على فكرة كاملة عن الظروف المستقبلية بالإضافة إلى البدائل المختلفة التي ستظهر في المستقبل القريب، عند وجود مثل هذه المشكلات يُعرف القرار الذي يتخذه المدير باسم اتخاذ القرار في ظل عدم اليقين.

هناك عدد من المعايير المتاحة لاتخاذ القرار في ظل عدم اليقين، الافتراض هنا بالطبع أنه لا توجد توزيعات احتمالية متاحة في ظل هذه الظروف، سيتم مناقشة عدة معايير نوضحها ما يلي:

1- معيار لابلاس (معيار العقلانية).
2- معيار(Maximin) minimax .

3- معيار maximax .

4- معيار Hurwicz (معيار الواقعية).

5- معيار Savage أو (Minimax Regret).

في المعايير المذكورة أعلاه، يُفترض أيضا أن صانع القرار ليس لديه خصم " ذكي" تتعارض مصلحته مع مصلحة صانع القرار، على سبيل المثال عندما يقاتل جيشان بعضهما البعض فإنهما يمثلان حالة خصوم أذكياء ويتم التعامل مع مثل هذه الحالات من خلال نظرية الألعاب.

معيار لابلاس (معيار العقلانية) (The Laplace criterion (Criterion of Rationality :

في هذه الحالة نأخذ الوسط الحسابي لكل بديل، حيث يكون البديل الأفضل كما يلي:

- في حالة الأرباح نأخذ أعلى قيمة.
- في حالة التكاليف نأخذ أدنى قيمة.

مثال1:

تدرس شركة " س" إمكانية إنتاج وتسويق نوع جديد من نواقل الألياف البصرية المخصصة للاتصالات، يتطلب القيام بهذا المشروع بناء إما مصنع كبير a_1 أو مصنع صغير a_2 ، من خلال دراسة حالة السوق استنتجت ثلاث حالات للسوق (واعد بشكل قوي b_1 ، واعد بشكل متوسط b_2 ، غير واعد b_3) ، بالطبع لدى هذه الشركة خيار عدم تطوير خط الإنتاج الجديد على الإطلاق a_3 .

مصفوفة الدفع كانت كما يلي:

الحالة / البدائل	b_1	b_2	b_3
a_1	175	2045	3300
a_2	2250	0	3750
a_3	2000	-5000	3600

المبالغ بوحدة نقدية.

المطلوب: أوجد البديل الأفضل والذي يحقق أعلى عائد بطريقة لابلاس.

ملاحظة: من الجدول نلاحظ أنه توجد قيمة سالبة تعني هذه خسارة في الحالة b_2.

حل المثال1:

أولا: ايجاد الوسط الحسابي لكل حالة:

$$a_1 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} x_j = \frac{1}{3}(175 + 2045 + 3300) = 1840\ UM$$

$$a_2 = 2000\ UM \quad , \quad a_3 = 200\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو بناء مصنع صغير a_2 .

معيار(Maximin) minimax :

يعرف بمعيار فالد wald ، في حالة الأرباح نأخذ أدنى قيمة في كل صف ونضعها في عمود ثم نختار أعلى الأدنىMaximin .

أما في حالة التكاليف نأخذ أعلى قيمة في كل صف ونضعها في عمود ثم نختار أدنى الأعلى **minimax.**

مثال 2:

نفس بيانات المثال1 ما هو أفضل بديل باستخدام معيار Maximin ؟

حل المثال2:

البدائل \ الحالة	b_1	b_2	b_3	min
a_1	175	2045	3300	175
a_2	2250	0	3750	0
a_3	2000	-5000	3600	-5000

$$Max\min = 175\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو بناء مصنع كبير a_1 .

معيار maximax :

في حالة الأرباح نأخذ أعلى قيمة في كل صف ونضعها في عمود ثم نختار أعلى الأعلىMaxiMax .

أما في حالة التكاليف نأخذ العكس Minmin.

مثال 3:

نفس بيانات المثال1 ما هو أفضل بديل باستخدام معيار MaxiMax ؟

حل المثال3:

البدائل \ الحالة	b_1	b_2	b_3	Max
a_1	175	2045	3300	3300
a_2	2250	0	3750	3750
a_3	2000	-5000	3600	3600

$$Maxi\max = 3750\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو بناء مصنع صغير a_2 .

معيار Hurwicz (معيار الواقعية):

من خلال هذا المعيار يتم دمج معيارين (التفاؤل والتشاؤم)، حيث تعطى نسبة التفاؤل p ، وتكون نسبة التشاؤم $q = 1 - p$ ، وبضرب معياريي التفاؤل والتشاؤم بنسبتيهما ونجمعهما نأخذ ما يلي:

- في حالة الأرباح نأخذ أعلى قيمة.
- في حالة التكاليف نأخذ أدنى قيمة.

أما في حالة التكاليف نأخذ العكس Minmin.

مثال 4:

نفس بيانات المثال1 ، نفرض أن نسبة التفاؤل تساوي $p = 0.8$ ، ما هو أفضل بديل باستخدام معيار **Hurwicz** ؟

حل المثال4:

الحالة / البدائل	معيار التفاؤل	معيار التشاؤم
a_1	3300	175
a_2	3750	0
a_3	3600	-5000

عرض البدائل يكون كما يلي:

$$a_1 = 3300 \times 0.8 + 175 \times 0.2 = 2675\ UM$$
$$a_2 = 3750 \times 0.8 + 0 \times 0.2 = 3000\ UM$$
$$a_1 = 3600 \times 0.8 + (-5000) \times 0.2 = 1880\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو بناء مصنع صغير a_2 .

معيار الندم لـ Savage أو (Minimax Regret):

أولا: في حالة الأرباح ، نتبع الخطوات التالية:

- نأخذ أكبر قيمة في كل عمود ويطرح من كل قيم العمود (تتشكل لنا مصفوفة الندم).
- نأخذ أكبر قيمة في كل صف ونضعها في عمود يسمى عمود الندم.
- نختار من عمود الندم أقل قيمة ندم حيث تمثل قيم هذا العمود مقدار الندم الذي نحصل عليه جراء اختيار لهذا البديل، وبالتالي يكون الاختيار يكون لأقل معيار ندم.

مثال 5:

نفس بيانات المثال1 ما هو أفضل بديل باستخدام معيار **Savage** ؟

حل المثال5:

الحالة البدائل	b_1	b_2	b_3	معيار الندم
a_1	2075	0	450	2075
a_2	0	2045	0	2045
a_3	250	7045	150	7045

$$\textbf{Minimax} = 2045\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو بناء مصنع صغير a_2 .

ثانيا: في حالة التكاليف نأخذ أصغر قيمة في البداية ونطرحها من كل القيم ونتابع نفس طريقة أعلى عائد.

مثال 6:

في حالة كون لدينا مصفوفة الدفع خاصة بالتكاليف التي نقدمها على النحو الاتي:

صانع قرار أراد أن يكتشف المكاسب المحتملة من حيث تخفيض تكاليف مشروع معين من خلال ثلاث بدائل (التوسع في المشروع القديم، التعاقد من الباطن، عدم القيام بأي شيء)، مع أربع حالات.

البدائل	حالة الطبيعة			
	لا يوجد طلب	طلب منخفض	طلب متوسط	طلب مرتفع
توسع	12	19	16	13
التعاقد من الباطن	24	21	18	15
لا شيء	36	33	30	27

المبالغ بالوحدة النقدية

المطلوب : ما هو أفضل بديل باستخدام المعايير السابقة ، نأخذ ($p=0.7$) بالنسبة لمعيار الواقعية.

حل المثال 6:

معيار لابلاس

أولا: ايجاد الوسط الحسابي لكل حالة:

$$a_1=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}x_j=\frac{1}{4}(3+6+9+12)=15\ UM$$

$$a_2=19.5\ UM \quad , \quad a_3=31.5\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو التوسع في المشروع القديم a_1 .

معيار minimax :

الحالة / البدائل	b_1	b_2	b_3	b_4	Max
a_1	13	16	19	12	19
a_2	15	18	21	24	24
a_3	27	30	33	36	36

$$Min\max = 19\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو التوسع في المشروع القديم a_1 .

معيار Minimin :

الحالة / البدائل	b_1	b_2	b_3	b_4	min
a_1	13	16	19	12	12
a_2	15	18	21	24	15
a_3	27	30	33	36	27

$$Mini\min = 12\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو التوسع في المشروع القديم a_1 .

معيار Hurwicz (معيار الواقعية):

الحالة / البدائل	معيار التفاؤل **0.7**	معيار التشاؤم **0.3**
a_1	12	19
a_2	15	24
a_3	27	36

عرض البدائل يكون كما يلي:

$$a_1 = 12 \times 0.7 + 19 \times 0.3 = 14.1\ UM$$
$$a_2 = 15 \times 0.7 + 24 \times 0.3 = 17.1\ UM$$
$$a_1 = 27 \times 0.7 + 36 \times 0.3 = 29.7\ UM$$

ويكون البديل الأفضل هو التوسع في المشروع القديم a_1 .

معيار الندم لـSavage :

الحالة البدائل	b_1	b_2	b_3	b_4	معيار الندم
a_1	0	0	0	0	0
a_2	2	2	2	12	12
a_3	14	14	14	24	24

$$\textbf{Minimax} = 2045\ UM$$

ويكون البديل الأفضل صاحب أقل معامل ندم و هو التوسع في المشروع القديم a_1 .

10-2-3- اتخاذ القرار في ظل ظروف المخاطرة Decision-making Under Conditions of Risk :

في ظل ظروف المخاطرة يمتلك صانع القرار معلومات كافية لتعيين احتمالات لكل حالة من حالات الطبيعة، عادة ما تستند القرارات المعرضة للخطر إلى أحد المعايير التالية:

- معيار القيمة المتوقعة Expected monetary value.
- شجرة اتخاذ القرار Decision Tree .

أ- معيار القيمة المتوقعة (القيمة النقدية المتوقعة) - معيار(EMV)

تعد القيمة النقدية المحددة (EMV) جزءًا لا يتجزأ من إدارة المخاطر وتستخدم في إجراء عملية تحليل المخاطر الكمية ، حيث تعتبر تقنية إحصائية تستخدم في إدارة المخاطر.

لحساب أفضل بديل باستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نقوم بحساب (EMV) لكل بديل، وذلك بضرب قيمة الأرباح (التكاليف) في قيمة احتمال لكل حالة مع جمع النواتج لكل بديل.
- نقوم بحساب القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الكاملة Expected value of perfect information ، والتي تساوي: $EVPI = EVwPI - EVwoPI$.

$EVwoPI = Max(EMV)$: أفضل قيمة متوقعة بدون إدراج معلومات إضافية،

$EVwPI$: القيمة المتوقعة مع المعلومات الكاملة، حيث نختار أفضل عائد لكل حالة وضربه في احتمالها.

مثال1: (حالة الأرباح)

الحالة / البدائل	b_1	b_2	b_3
a_1	175	2045	3300
a_2	2250	0	3750
a_3	2000	-5000	3600
الاحتمال	**1/3**	**1/3**	**1/3**

المطلوب : ما هو أفضل بديل باستخدام معيار(EMV) ؟

حل المثال2:

$$EMV(a_1) = \frac{1}{3}(175 + 2045 + 3300) = 1840\ UM$$

$$EMV(a_2) = \frac{1}{3}(2250 + 0 + 3750) = 2000\ UM$$

$$EMV(a_3) = \frac{1}{3}(2000 - 5000 + 3600) = 200\ UM$$

أفضل بديل هو a_2 ، نحسب الأن EVPI :

$$EVwPI = 2250 \times \frac{1}{3} + 2045 \times \frac{1}{3} + 3750 \times \frac{1}{3} = 2681.67\ UM$$

$$EVPI = EVwPI - EVwoPI = 2681.67 - 2000 = 681.67\ UM$$

فـ EVPI هو الثمن الذي ستكون فيه الشركة على استعداد لدفعه من أجل الوصول إلى المعلومات المثالية، و في هذا السياق وعند النظر في اتخاذ قرار بشأن بناء مصنع صغير هناك دائما درجة عدم اليقين المحيطة بالقرار، لأن هناك دائما فرصة أن يكون القرار خاطئا، تحاول هذه القيمة قياس التكلفة المتوقعة لعدم اليقين هذا، والتي يمكن تفسيرها على أنها القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة (EVPI)، نظرا لأن المعلومات المثالية يمكن أن تقضي على إمكانية اتخاذ القرار الخاطئ .

إن معرفة الاتجاه الذي سيتجه إليه السوق (أي الحصول على معلومات كاملة) يساوي 681.67 وحدة نقدية.

أي في ضوء كل اتجاه في السوق، نختار أداة الاستثمار التي تزيد الربح إلى أقصى حد.

مثال2: (حالة التكاليف)

الحالة / البدائل	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	13	16	19	12
a_2	15	18	21	24
a_3	27	30	33	36
الاحتمال	1/4	1/4	1/8	3/8

المطلوب : ما هو أفضل بديل باستخدام معيار(EMV) ؟

حل المثال2:

$$EMV(a_1) = 13\times\frac{1}{4} + 16\times\frac{1}{4} + 19\times\frac{1}{8} + 12\times\frac{3}{8} = 14.125\ UM$$

$$EMV(a_2) = 15\times\frac{1}{4} + 18\times\frac{1}{4} + 21\times\frac{1}{8} + 24\times\frac{3}{8} = 19.875\ UM$$

$$EMV(a_3) = 27\times\frac{1}{4} + 30\times\frac{1}{4} + 33\times\frac{1}{8} + 36\times\frac{3}{8} = 31.875\ UM$$

أفضل بديل هو a_1، نحسب الأن مقدار EVPI :

$$EVwPI = 13\times\frac{1}{4}+16\times\frac{1}{4}+19\times\frac{1}{8}+12\times\frac{3}{8}=14.125\ UM$$
$$EVwoPI = Min\left(EMV\right)$$
$$EVPI = \left|EVwPI - EVwoPI\right| = \left|14.125-14.125\right| = 0\ UM$$

10-3- شجرة اتخاذ القرار Decision Tree :

هي طريقة بيانية تساعد صاحب القرار على اتخاذ القرار السليم، لأنها توفر له الاحاطة بالبدائل المتاحة وتبين له حالات الطبيعة مع احتمالات الحدوث، عندما يكون هناك قراران متسلسلان أو أكثر وتستند القرارات اللاحقة إلى نتيجة القرارات السابقة يصبح نهج شجرة القرار مناسبا، فشجرة القرار هي عرض بياني لعملية القرار التي تشير إلى بدائل القرار ، وحالات الطبيعة واحتمالات كل منها ، والمكافآت لكل مجموعة من بديل القرار وحالة الطبيعة.

القيمة النقدية المتوقعة (EMV) هي المعيار الأكثر استخداما لتحليل شجرة القرار، إذ تتمثل إحدى الخطوات الأولى في هذا التحليل في رسم شجرة القرار وتحديد العواقب المالية لجميع النتائج لمسألة معينة، يتضمن تحليل المسائل باستخدام أشجار القرار خمس خطوات:

1. تحديد المشكلة.
2. هيكل أو رسم شجرة القرار.
3. تعيين احتمالات لحالات الطبيعة.
4. تقدير المكاسب لكل مجموعة ممكنة من بدائل القرار وحالات الطبيعة.
5. حل المشكلة عن طريق حساب القيم النقدية المتوقعة (EMV) لكل حالة، ويتم ذلك من خلال العمل للخلف – أي بالبدء من يسار الشجرة والعودة إلى عقد القرار على اليمين.

10-3-1- تكوين شجرة القرار:

- رسم مربع ▯ يخرج منه بدائل القرار.
- من كل بديل نرسم دائرة ● تخرج منها حالات الطبيعة، ويكتب عليها احتمال كل حالة وقيمتها.
- حساب جداء كل قيمة من قيم الحالات في نسبتيها، ونجمع محصلة كل بديل، حيث يكون البديل الأفضل صاحب أكبر قيمة في حالة (الأرباح)، وأصغر قيمة في حالة (التكاليف).

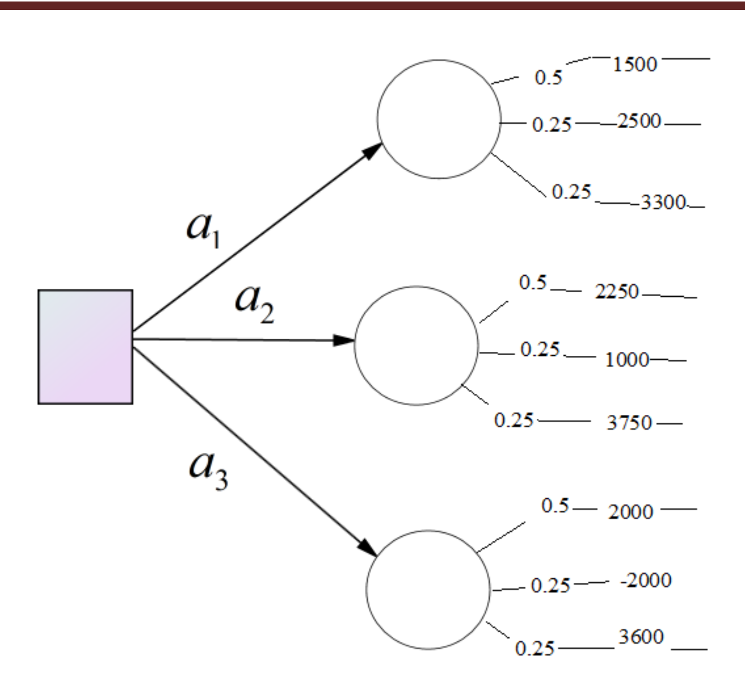
مثال1:

بالرجوع إلى مثال نواقل الألياف البصرية المخصصة للاتصالات، فرضا أن تكلفة انشاء مصنع كبير تقدر بـ 800 وحدة نقدية، والمصنع الصغير تقدر بـ 500 وحدة نقدية، اضافة إلى احتمال الحالات المبينة في الجدول.

الحالة / **البدائل**	b_1	b_2	b_3
a_1 مصنع صغير	1500	2500	3300
a_2 مصنع كبير	2250	1000	3750
a_3	2000	-2000	3600
الاحتمال	**1/2**	**1/4**	**1/4**

المطلوب : ما هو أفضل بديل باستخدام شجرة القرار ؟

حل المثال1:



$$EMV(a_1)=0.5\times1500+0.25\times2500+0.25\times3300=2200\ UM$$
$$EMV(a_2)=0.5\times2250+0.25\times1000+0.25\times3750=2312.5\ UM$$
$$EMV(a_3)=0.5\times2000+0.25\times(-2000)+0.25\times3600=1400\ UM$$

صافي الربح المتوقع:

$$(a_1)=2200-500=1700\ UM$$
$$(a_2)=2312.5-800=1512.5\ UM$$
$$(a_3)==1400\ UM$$

أفضل بديل هو بناء مصنع صغير (a_1).

مثال2:

مزارع غير متأكد مما إذا كان يجب عليه حفر بئر في حقله وهو يستخدم حاليا مياه القناة الحكومية لري حقله والتي يدفع مقابلها 100000 دج في السنة، لم يكن تاريخ

حفر الأبار الأنبوبية في القرية مشجعا للغاية حيث تبلغ نسبة وجود الماء 40 بالمائة فقط حتى 150 متر من الحفر، قام بعض المزارعين بالحفر لمسافة تصل إلى 200 متر لكن 30 في المائة منهم فقط وجدوا الماء على بعد 200 متر، تكلفة الحفر 4000 دج لكل متر، يتعين على المزارع اتخاذ القرارات الثلاثة التالية:

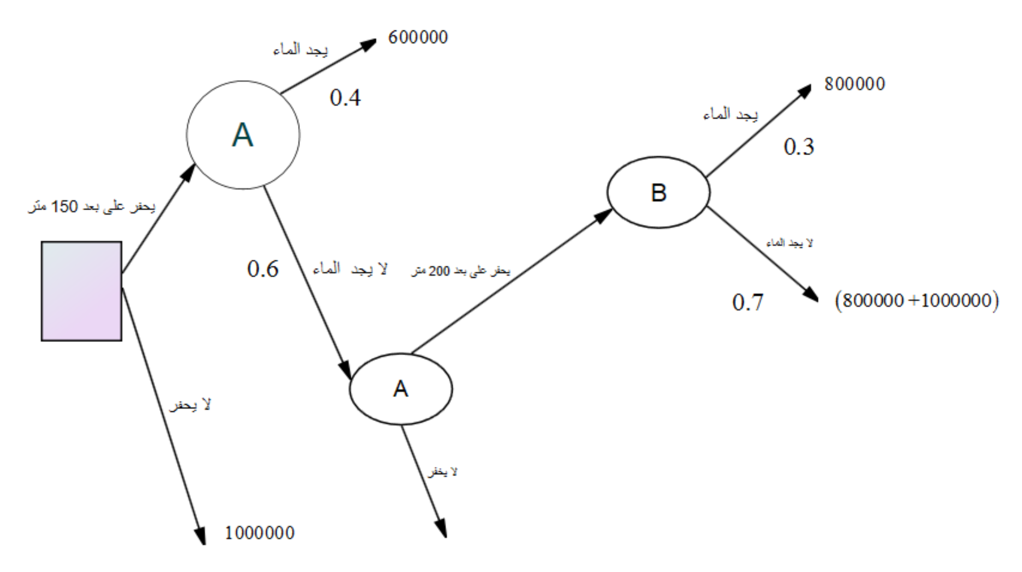
أ- هل سيحفر حتى 150 متر؟

ب- إذا لم يجد الماء على بعد 150 متر، فهل يجب أن يحفر حتى 200 متر؟

ج- هل يجب أن يستمر في شراء المياه من الحكومة لمدة 10 سنوات قادمة، حيث أن عمر البئر الأنبوبي هو 10 سنوات فقط.

حل المثال2:

نوضح معطيات المسألة في الشكل التالي:



في عقدة القرار الأولى يتعين على المزارع اتخاذ قرار قبل الحفر حتى 150 متر أو عدم الحفر، إذا قرر عدم الحفر فيتعين عليه دفع 100000 دج في السنة لمدة 10 سنوات، إذا حفر حتى 150 متر فهناك احتمالان 40 % يجد الماء ، و 60 % لا

يجد الماء ، إذا تم العثور على الماء فإن التكلفة التي يتكبدها هي 600000 دج (حفر 150 متر بتكلفة 4000 دج لكل متر) ، إذا لم يتم العثور على ماء على بعد 150 متر فإنه يتخذ قرار الحفر حتى 200 متر أو عدم الحفر، إذا لم يحفر 150 متر فإنه يتحمل تكلفة تقدر بـ 1600000 دج لأنه قد أنفق بالفعل 600000 دج للحفر حتى 150 متر و 1000000 دج (تكاليف تزويد الماء من قبل الحكومة لمدة 10 سنوات)، فهناك احتمال مؤكد قدره 0.30 أنه سيتم العثور على الماء و 0.70 لن يتم العثور على الماء، إذا تم العثور على الماء فإنه ينفق 4000 دج لكل 200 متر ، وإذا لم يتم العثور عليه فسينفق 1800000 دج ، حيث أنفق بالفعل 800000 دج على الحفر حتى 200 متر ، ولكن عليه أيضا إنفاق 1000000 دج لمدة 10 سنوات.

في مثل هذه المسائل علينا إجراء العمليات من الخلف:

بالنسبة للعقدة B: $EMV(B) = 0.30 \times 800000 + 0.70 \times 1800000 = 1500000\ DA$.

(عليه اختيار الأقل من 1500000 دج و 1600000 دج).

بالنسبة للعقدة A: $EMV(A) = 0.4 \times 600000 + 0.6 \times 1500000 = 1140000\ DA$.

(عليه اختيار الأقل من 1140000 دج و 1000000 دج).

الاختيار النهائي:

يمكن أن نرى بسهولة أن أفضل مسار عمل للمزارع هو عدم الحفر ودفع 1000000 دج للحكومة جراء التزود من المياه لمدة 10 سنوات.

10-3-2- مزايا طريقة شجرة القرار:

1- طريقة منهجية ومنظمة ومنطقية ومتسلسلة.

2- تسرد جميع النتائج المحتملة وتساعد عقد القرار على فحص كل منها.

3- بما أن القرار يؤثر الآن على عملية صنع القرار في المستقبل ، فإن شجرة القرار مفيدة بشكل خاص في مثل هذه المواقف.

4- يمكن تطبيق هذه الطريقة على مسائل القرار المختلفة، مثل إدخال منتج جديد، وقرارات الاستثمار وما إلى ذلك.

10-3-3- حدود طريقة شجرة القرار:

1- في مواقف الحياة الواقعية، يتم اتخاذ القرارات في ظل عدد كبير من المتغيرات في مثل هذه الحالات يصبح الرسم التخطيطي معقدا للغاية.

2- يفترض أن فائدة المال خطية مع الزمن وهذا ليس صحيح دائما.

3- تنتج شجرة القرار حل فقط " متوسط " القيمة حيث يتم تحليل المسألة على أساس القيم المتوقعة.

4- إن إسناد الاحتمالات لأحداث مختلفة ليس دقيقا في كثير من الأحيان وهو مجرد قيمة منطقية.

10-4- نظرية المنفعة Utility Theory :

تتعلق هذه النظرية بتفضيلات الأشخاص مع الأخذ بعين الاعتبار الخيارات ذات النتائج غير المؤكدة (المراهنة)، تنص على أن القيمة الذاتية المرتبطة بمراهنة الفرد هي التوقعات الإحصائية لتقييم نتائج تلك المراهنة على الفرد نفسه، إذ تختلف هذه التقييمات عن القيمة النقدية لتلك النتائج، يعتبر تقديم دانييل بيرنولي لمفارقة سانت بطرسبرغ عام 1738[1] أولى بدايات الفرضية، أثبتت هذه الفرضية أنها مفيدة لشرح

[1]- **مفارقة بطرسبرغ Petersburg paradox**
مفارقة سانت بطرسبرغ هي مفارقة تتعلق بالاحتمالات ونظرية القرار في الاقتصاد، وهي تتألف من لعبة يانصيب تم تصميمها بواسطة متغير عشوائي توقعاته الرياضية لانهائية ، ولكن من أجلها يوافق المشاركون فقط على دفع مبلغ صغير من المال للعب، توضح مفارقة سانت بطرسبرغ أن معيار القرار الساذج القائم فقط على التوقع الرياضي يؤدي إلى خيارات لن يتخذها أحد في الممارسة، تم اقتراح طرق مختلفة لحل هذا التناقض.
تتكون اللعبة من رمي قطعة نقد متوازية (غير مغشوشة) بشكل متكرر حتى تظهر الصورة (الوجه)، نفترض أن هذا يحدث n من المرات مع دفع 2^n دينار لكل ظهور للصورة ، العائد المتوقع لهذه اللعبة هو:

بعض الخيارات الشائعة التي يبدو أنها تتعارض مع معيار القيمة المتوقعة (الذي يأخذ في الحسبان أحجام العوائد واحتمالات حدوثها).

تُظهر نظرية المنفعة لفون نيومان– مورجينسترن (VNM) (1947) أنه في ظل بعض مسلمات السلوك العقلاني سيتصرف صانع القرار الذي يواجه نتائج محفوفة بالمخاطر (احتمالية) لخيارات مختلفة كما لو أنه يقوم بتعظيم القيمة المتوقعة لبعض الدوال المحددة على النتائج المحتملة في نقطة معينة في المستقبل، تُعرف هذه الدالة بدالة المنفعة.

نوضح الآن كيف يمكن استخدام مفهوم (VNM) لدالة المنفعة كعامل مساعد في اتخاذ القرار في ظل عدم اليقين .

تتمثل فرضية المنفعة المتوقعة في أنه يمكن نمذجة العقلانية على أنها تعظيم القيمة المتوقعة ، والتي في ضوء النظرية يمكن تلخيصها على أنها " عقلانية VNM "، ومع ذلك فقد تم انتقاد البديهيات نفسها على أسس مختلفة مما أعطى البديهيات مزيدا من التبرير.

10-4-1- دالة المنفعة Utility Function

يتم التقاط تفضيلات متخذ القرار بواسطة دالة المنفعة "U" ، نبدأ بمناقشة الحاجة إلى مقارنة درجة الاعتقاد بين عبارتين مختلفتين، يتطلب هذا التوضيح القدرة على مقارنة درجة الرغبة في نتيجتين مختلفتين، نذكر تفضيلاتنا باستخدام العوامل التالية:

$A>B$ إذا فضلنا A على B.

$A\sim B$ إذا كنا غير مبالين بين A و B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot 2^n = \frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+......$$
$$=1+1+1+.....=\infty$$

$A \geq B$ إذا كنا نفضل A على B أو كنا غير مبالين.

مثلما يمكن أن تكون المعتقدات ذاتية ، كذلك يمكن أن تكون التفضيلات.

إذا كانت $S_{1:n}$ هي مجموعة من النتائج و $P_{1:n}$ ، هي الاحتمالات المرتبطة بها، تتم كتابة المراهنة التي تتضمن هذه النتائج والاحتمالات $[S_1 : P_1 ;......; S_n : P_n]$.

يناقش هذا القسم كيف ينشأ وجود مقياس حقيقي لقيمة المنفعة من مجموعة من الافتراضات حول التفضيلات و من خلال دالة المنفعة هذه من الممكن تحديد ما يعنيه اتخاذ قرارات عقلانية في ظل عدم اليقين.

10-4-2- القيود على التفضيلات العقلانية:

مثلما فرضنا مجموعة من القيود على المعتقدات، سنفرض بعض القيود على التفضيلات، تسمى هذه القيود أحيانا ببديهيات **VNM** التي صاغها جون فون نيومان وأوسكار مورجينسترن في الأربعينيات.

1- **الاكتمال Completeness:** واحد بالضبط من عمليات التعليق التالية:

$$A > B \ , \ B > A \ ; A \sim B$$

2- **التعديTransitivity:** $A \geq B \ , \ B \geq C \Rightarrow A > C$

3- **الاستمرارية Continuity** : إذا كان $A \geq C \geq B$ ، فيوجد احتمال p كهذا $[A: P \ ; B: 1-P \ ] \sim C$.

4- **الاستقلالية Independence:** إذا كان $A > B$ ثم لأي C والاحتمال $[A: P \ ; C: 1-P \ ] > [B: P \ ; C: 1-P \ ]$

هذه قيود على التفضيلات العقلانية، لا نقول شيئا عن تفضيلات البشر الفعليين ، في الواقع هناك دليل قوي على أن البشر ليسوا عقلانيين تماما، هدفنا في هذه الفقرات هو فهم اتخاذ القرار العقلاني من منظور حسابي حتى نتمكن من بناء أنظمة مفيدة.

نرجع إلى مفهوم دالة المنفعة utility function:

مثلما تؤدي القيود المفروضة على مقارنة معقولية للبيانات المختلفة إلى وجود مقياس احتمالي حقيقي للقيمة ، بحيث أن هذه القيود تؤدي إلى وجود مقياس منفعي حقيقي

للقيمة ويترتب على قيودنا على التفضيلات العقلانية أن هناك دالة منفعة حقيقية القيمة U مثل ذلك:

- $U(A)>U(B)$ إذا وفقط إذا كان $A>B$ و $U(A)=U(B)$ إذا وفقط إذا كان $A\sim B$.
- دالة المنفعة وحيدة من نوعها حتى في التحويل التألفي، بمعنى أخر لأي ثوابت $m>0$ و b، $U'(S)=mU(S)+b$ إذا وفقط إذا كانت التفضيلات التي تحدثها U هي نفسها مثل U' ، فالمنفعة مثل درجة الحرارة: يمكننا مقارنة درجات الحرارة باستخدام كلفن أو سيليزيوس أو فهرنهايت ، وكلها تحويلات تألفية لكل منها مع الأخر.

ويترتب على القيود المفروضة على التفضيلات العقلانية أن منفعة الرهان يعطى كما يلي:

$$U\left(\left[S_1 : P_1 \; ;......; S_n : P_n \;\right]\right)=\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot U\left(S_i\right)$$

لنفترض أننا نبني نظاما لتجنب الاصطدام، إذ يتم تحديد نتيجة مواجهة طائرة من خلال ما إذا كان النظام يقوم بالتنبيه (A) وما إذا كان الاصطدام ينتج (C)، نظرا لأن A و C ثنائيتان فهناك أربع نتائج محتملة طالما أن تفضيلاتنا عقلانية ، يمكننا كتابة دالة المنفعة الخاصة بنا على فضاء الرهان المحتملة من حيث أربعة معلمات:

$$U\left(a^0,c^0\right),U\left(a^1,c^0\right),U\left(a^0,c^1\right),U\left(a^1,c^1\right)$$

على سبيل المثال: $U\left(\left[\, a^0,c^0 : 0.3 \; ; \; a^1,c^0 : 0.2 \; ; \; a^0,c^1 : 0.4 \; ; \; a^1,c^1 : 0.1 \;\right]\right)$ تساوي:

$$0.3U\left(a^0,c^0\right)+0.2U\left(a^1,c^0\right)+0.4U\left(a^0,c^1\right)+0.1U\left(a^1,c^1\right)$$

إذا كانت دالة المنفعة محدودة، فيمكننا تحديد دالة المنفعة المعيارية، حيث يتم تعيين أفضل نتيجة ممكنة للمنفعة المعينة 1 ، ويتم تعيين أسوأ نتيجة ممكنة للمنفعة المعينة 0، ويتم قياس منفعة كل نتيجة من النتائج الأخرى وترجمتها حسب الضرورة.

10-4-3- أقصى منفعة متوقعة (MEU) Maximum Expected Utility :

ينص مبدأ الحد الأقصى من المنفعة المتوقعة على أن متخذ القرار العقلاني يجب أن يختار الخطوة التي تزيد من المنفعة المتوقعة، بعبارة أخرى فإن مبدأ (MEU) هو وصفة طبية للسلوك الذكي.

للتوضيح نضع هذا المثال التالي: نحتاج إلى معرفة ما إذا كنا بحاجة إلى حمل مظلة أم لا ؟ إذا هطل المطر ولم يكن لدينا مظلة ، فإن منفعتنا هي 0 وحدة ، بينما تكون 30 وحدة إذا كان لدينا مظلة، إذا لم تمطر ولم يكن لدينا مظلة فإن المنفعة الخاصة بنا هي 36 وحدة بينما تكون 30 وحدة إذا كان لدينا مظلة، فرصة هطول أمطار في أي يوم 50٪.

فتحليل المنفعة المتوقعة لتحديد ما إذا كان ينبغي حمل المظلة أم لا يكون كما يلي:

EU(حمل المظلة) = $0.5 \times 30 + 0.5 \times 30 = 30$

EU(عدم حمل المظلة) = $0.5 \times 0 + 0.5 \times 36 = 18$

لنهتم بمسألة اتخاذ قرارات عقلانية بمعرفة غير كاملة للحالات، نفترض أن لدينا نموذجا احتماليا $P(S' \setminus 0,a)$ الذي يمثل احتمال أن تصبح الحالة S' على النحو الذي نلاحظه 0 ونتخذ الإجراء a ، لدينا دالة المنفعة $U(S')$ التي ترمز لتفضيلاتنا على فضاء النتائج، يتم تقديم منفعتنا المتوقعة في اتخاذ إجراء a عند ملاحظة معينة 0 :

$$EU(a \setminus 0) \sum_{S'} P(S' \setminus 0,a) \cdot U(S') .$$

ينص مبدأ الحد الأقصى من المنفعة المتوقعة على أن العامل العقلاني يجب أن يختار الإجراء الذي يزيد المنفعة المتوقعة إلى الحد الأقصى، أي: $a^* = \underset{a}{\operatorname{argmax}} EU(a \setminus 0)$.

10-4-4- استنباط المنفعة:

عند بناء نظام اتخاذ القرار أو دعم القرار، غالبا ما يكون من المفيد استنتاج دالة المنفعة من إنسان أو مجموعة من البشر، هذا النهج يسمى استنباط المنفعة أو استنباط التفضيل، تتمثل إحدى طرق القيام بذلك في وضع 0 لأسوأ منفعة ، و 1 لأفضل نتيجة ، طالما أن المنفعة الخاصة بالنتائج محدودة ، يمكننا ترجمة وتوسيع نطاق المنفعة دون تغيير التفضيلات، فإذا أردنا تحديد منفعة النتيجة S ، فإننا نحدد الاحتمال.

مثال:

نفترض أن لدينا 10000000 دج نودوا استثمارها على المدى القصير، ظهرت لنا ثلاثة خيارات:

- ايداع بنكي بعائد 8٪ (a_1).
- صندوق السندات بعائد غير مؤكد (a_2).
- صندوق الأسهم بعائد غير مؤكد (a_3).

أمام ثلاث حالات: معدل منخفض (b_1)، معدل مستقر (b_2)، معدل مرتفع (b_3).

باقي المعلومات مبينة في الجدول التالي:

الحالة **البدائل**	b_1	b_2	b_3
a_1	800	800	800
a_2	-1000	1680	2000
a_3	-1800	1200	3400
الاحتمال	**1/3**	**1/3**	**1/3**

البيانات بـ 10^3

المطلوب: حدد أفضل قرار باستخدام:

1- القيمة المتوقعة.

2- المنفعة المتوقعة.

حل المثال:

1- القيمة المتوقعة:

أفضل بديل باستخدام القيمة المتوقعة:

$$EMV(a_1) = \frac{1}{3}(800 + 800 + 800) = 800\ DA$$

$$EMV(a_2) = \frac{1}{3}(-1000 + 1680 + 2000) = 893.33\ DA$$

$$EMV(a_3) = \frac{1}{3}(-1800 + 1200 + 3400) = 933.33\ DA$$

أفضل بديل باستخدام القيمة المتوقعة هو a_3.

2- المنفعة المتوقعة:

من خلال معيار القيمة المتوقعة وجدنا أن أفضل بديل هو a_3 (الاستثمار في صندوق الأسهم) ، لنلقي نظرة من زاوية أخرى تتعلق بقدرة هذه الشركة على استيعاب خسائر بقيمة 1800 دج (الاستثمار في صندوق الأسهم بمعدل منخفض) ، هذا إن دل فأنه يدل على القدرة المالية الضعيفة حتى وإن كانت جزئيا، نفس الشيء ينطبق في (الاستثمار في صندوق السندات بمعدل منخفض)، مع هذه الظروف المالية الصعبة يستحسن لهذه الشركة ايداع أموالها في البنك لتقليل المخاطر، للتأكيد على اختيار هذا البديل نستخدم معيار المنفعة المتوقعة، حيث نتبع الخطوات التالية:

أولا: نقوم بتعيين أعلى منفعة لأعلى عائد $U(x) = 10$ (أستخدمنا السلم [10 , 0]) ، ثم تعيين أدنى منفعة لأدنى عائد $U(x) = 0$.

ثانيا: ترتيب العوائد تنازليا:

المنفعة $U(x)$	العائد (x)
10	3400

2000	
1680	
1200	
800	
-1000	
-1800	0

ثالثا: تحديد المنفعة المرتبطة مع العوائد الأخرى، بفرض أن متخذ القرار سيختار المراهنة بالعائد 3400 دج ومبلغ مضمون بقيمة 2000 دج ، من الواضح أن متخذ القرار سيختار المراهنة بعائد 3400 دج كلما كان الاحتمال p قريب من 1 ، لكن سيواجه صعوبة في المفاضلة بين الدخول في المراهنة أو المبلغ الأكيد كلما انخفض الاحتمال p من 1، سيختار المبلغ المضمون كلما اقترب الاحتمال p من 0.

بفرض أن $P = 0.9$ يمكن حساب منفعة العائد 2000 دج :

$$U(2000) = P \cdot U(3400) + (1-P)U(-1800)$$
$$= 0.9(10) + 0.1(0) = 9$$

وبنفس الكيفية مع بقية القيم الأخرى، نوضحها في الجدول التالي:

العائد (x)	الاحتمال	المنفعة $U(x)$
3400	1	10
2000	0.9	9
1680	0.85	8.5
1200	0.80	8
800	0.75	7.5
-1000	0.35	3.5
-1800	0	0

رابعا: تكوين مصفوفة المنفعة.

الحالة / البدائل	b_1	b_2	b_3	المنفعة المتوقعة
a_1	7.5	7.5	7.5	**7.5**
a_2	3.5	8.5	9	**7**
a_3	0	8	10	**6**
الاحتمال	**1/3**	**1/3**	**1/3**	

أفضل بديل باستخدام المنفعة المتوقعة هو a_1 (ايداع الأموال بالبنك).

10-5- المنفعة الأسية Exponential utility :

في الاقتصاد والتمويل ، المنفعة الأسية هي شكل محدد من دالة المنفعة ، وتستخدم في بعض السياقات بسبب ملاءمتها عند وجود مخاطر (يشار إليها أحيانا باسم عدم اليقين) ، وفي هذه الحالة يتم تعظيم المنفعة المتوقعة، تم تقديم المنفعة الأسية بواسطة دانييل برنولي[1] الذي أسس دوال المنفعة في عام 1738، فالمنفعة مصطلح يستخدمه الاقتصاديون لوصف القيمة، تقوم دالة المنفعة أو المنحنى بترجمة مقياس موضوعي. استطلع برنولي الناس ووجد أنهم بشكل غير مفاجئ يكرهون المخاطرة، وافترض أن تحمل الفرد للمخاطر يتناسب تقريبا مع الثروة، لا عجب: الأثرياء أكثر قدرة على تحمل المزيد من المخاطر.

يعطى شكل المنفعة الأسية على النحو الاتي: $U(x)=1-e^{\frac{-x}{R}}$

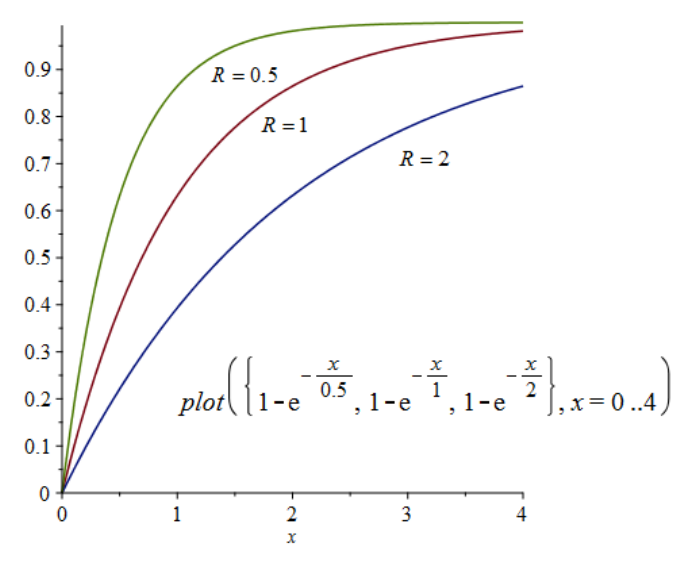
هنا x قيمة نقدية (مكافأة إذا كانت موجبة، والتكلفة إذا كانت سالبة)، $U(x)$ هي دالة هذه القيمة، و R هي معلمة قابلة للتعديل تسمى تحمل المخاطرة، في الأساس يقيس

[1] - **دانييل برنولي (1700 – 1782) Daniel Bernoulli** ، رياضياتي وفيزيائي سويسري أحد علماء الرياضيات البارزين في عائلة برنولي من بازل، نتذكره بشكل خاص في تطبيقاته للرياضيات في الميكانيكا ، وخاصة ميكانيكا الموائع ، ولعمله الرائد في الاحتمالات والإحصاء، أشهر عمل له كان كتابه الموائع المتحركة الهيدروديناميكا الذي نشر عام 1738 ووضع فيه دراسة نظرية وعملية لاتزان المائع وسرعته وضغطه، وبين أن ضغط المائع يقل إذا زادت سرعته، وهو ما يعرف حاليا بمبدأ برنولي، إحدى مشتقات قانون انحفاظ الطاقة.

تحمل المخاطر مقدار المخاطر التي سيتحملها صانع القرار، كلما زادت قيمة R قل نفور صانع القرار من المخاطرة، أي أن الشخص الذي لديه قيمة كبيرة لـ R يكون أكثر استعدادا لتحمل المخاطر من الشخص الذي يمتلك قيمة صغيرة لـ R.

فبدلا من مطالبة صانع القرار بتحديد منفعة لكل احتمال عائد ، يمكن تعويضها باستخدام دالة المنفعة الأسية، حيث أشرنا إلى أن R هي معلمة الشكل وهي مؤشر تحمل المخاطر، فأصغر قيم R لها أكثر تقعرا لـ $U(x)$ وهو أكثر نفورا من المخاطرة.

نوضح ذلك باستخدام برنامج Maple :



10-5-1- تقدير قيمةR :

تتمثل إحدى طرق تقدير قيمة R المناسبة لصانع القرار في:

نبحث عن الحد الأقصى للمكافأة R (بوحدة نقدية) التي يعتقد صانع القرار أن اغتنامها لربح R(بوحدة نقدية) يعادل خسارة $\frac{R}{2}$ (بوحدة نقدية).

هل نراهن على ربح 2000 دج مقابل خسارة 1000 دج ؟

ماذا عن المخاطرة بـ 1000 دج للفوز بـ 2000 دج ؟

ماذا عن المخاطرة بـ 4000 دج للفوز بـ 8000 دج ؟

فـ R تقيس أقصى مستوى للمخاطرة.

في مثالنا السابق:

قرار الاستثمار الشخصي بقيمة 10000000 دج، نفترض أننا تستخدم دالة منفعة أسية مع $R=800$ دج.

$$U(x)=1-e^{-\frac{x}{800}}$$

إننا على استعداد للمخاطرة بمبلغ 400 دج للفوز بـ 800 دج.

وبنفس الكيفية مع بقية القيم الأخرى، نوضحها في الجدول التالي:

المنفعة الأسية $U(x)$	**العائد** (x)
0.9857	3400
0.9179	2000
0.8775	1680
0.7768	1200
0.6321	800
-2.4903	-1000
-8.4877	-1800

رابعا: تكوين مصفوفة المنفعة الأسية.

الحالة / البدائل	b_1	b_2	b_3	المنفعة الأسية المتوقعة
a_1	0.6321	0.6321	0.6321	**0.6321**
a_2	-2.4903	0.8775	0.9179	**-0.2316**
a_3	-8.4877	0.7768	0.9857	**-2.2417**
الاحتمال	**1/3**	**1/3**	**1/3**	

أفضل بديل باستخدام المنفعة الأسية هو a_1 (ايداع الأموال بالبنك).

الأعلام المذكورة في الفصل العاشر:

جون فون نيومان
John von Neumann
(1957 – 1903)

أوسكار مورجنسترن
Oskar Morgenstern
(1977 -1902)

دانييل برنولي
Daniel Bernoulli
(1782 – 1700)

الفصل الحادي عشر : سلاسل ماركوف Markov Chains

تمهيد:

قبل التطرق إلى شرح مفهوم سلاسل ماركوف[1] وجب التطرق إلى شرح العمليات التصادفية (أو العشوائية).

11-1- مفهوم العمليات التصادفية (أو العشوائية):

هي تعميم لمفهوم المتغير العشوائي المستخدم في نظرية الاحتمال، إذ أن دراسة الاحتمال لتجربة مكونة من مشاهدات بحيث أن هذه المتغيرات العشوائية تدرس مناظرة كل مشاهدة بعدد أو أكثر، أما دراسة العمليات العشوائية فتستجوب مقابلة كل مشاهدة بدالة في الزمن.

كلمة عشوائية أو تصادفية (ستوكاستيكية) تعني الاحتمالية، أما كلمة عملية فتعني دالة في الزمن ، أي أننا في العمليات العشوائية ندرس دوال عشوائية في الزمن.

تُعمم العملية العشوائية مفهوم المتغير العشوائي المستخدم في نظرية الاحتمال، حيث يتم تعريفها: " بأنها عائلة من المتغيرات العشوائية $X(t)$ المرتبطة بجميع القيم $t \in T$.

[1] - **آندريه ماركوف (1856 - 1922) Andrey Markov** ، رياضياتي روسي من أشهر أعماله تلك المتعلقة بنظرية العملية العشوائية، وتعرف بحوثه بسلاسل ماركوف.

تعاريف عامة:

- نسمي عائلة المتغيرات العشوائية بالعملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ ذات المعلمة t .
- نسمي مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ بحالات states العملية العشوائية، كما يمكن تحديد مواضع (مواقع) العملية العشوائية، مثلا $X(t) = i$ أي أن العملية تكون في الحالة i عند اللحظة t.
- إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة متقطعة، فأن العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة متقطع (منفصل).
- إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة مستمرة أي $S \in (-\infty , \infty)$، فأن العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة مستمر (متصل).
- تسمى مجموعة جميع القيم الممكنة لمعلمة العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ بفضاء المعلمة، ويرمز له بالرمز T.

ملاحظات:

- إذا كانت المجموعة T متقطعة، فأن العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ تسمى بعملية عشوائية متقطعة الزمن، كما يمكننا استخدام الرمز n بدلا من الرمز t، ونكتب $X(n)$ أو X_n بدلا من $X(t)$ أو X_t .
- هناك أنواع للعمليات العشوائية، سنتهم بواحدة وهي: لكل عملية عشوائية فضاء حالة S وفضاء معلمةT، إذا كان فضاء الحالة قابل للعد فأن العملية العشوائية تسمى سلسلة chain.

11-2- خاصية ماركوف Markov Property :

لكي يتم اعتبار أي عملية نمذجة ماركوفية يجب أن تحقق خاصية ماركوف، حيث تنص هذه الخاصية على أن احتمال الحالة التالية يعتمد فقط على الحالة الحالية ، فكل شيء قبل الحالة الحالية غير مناسب، بمعنى أخر النظام بأكمله بلا ذاكرة تماما.

رياضيا يكتب على النحو التالي:

$$P\left(X_n = s_n \setminus X_{n-1} = s_{n-1},......,X_0 = s_0\right) = P\left(X_n = s_n \setminus X_{n-1} = s_{n-1}\right).......(1)$$

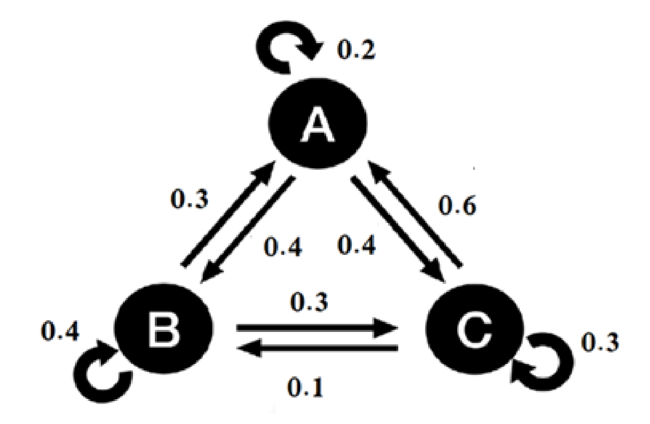
حيث n هي معلمة الخطوة الزمنية و X هو متغير عشوائي يأخذ قيمة في فضاء حالة معينة S، يشير هذا الفضاء إلى جميع النتائج المحتملة لحدث ما، على سبيل المثال رمي قطعة نقد منتظمة ، فضاء الحالة يكون كالتالي : $S=\{H,G\}$ ، حيث H ترمز للصورة و G ترمز للكتابة، واحتمال الانتقال من حالة إلى أخرى هو $\frac{1}{2}$.

11-3- ماهية سلسلة ماركوف:

كان الفضل في إيجادها الروسي أندريه ماركوف ، فسلسلة ماركوف هي نظام رياضي يختبر انتقالات من حالة إلى أخرى وفقًا لقواعد احتمالية معينة ، تُعرف العملية التي تستخدم خاصية ماركوف باسم عملية ماركوف، إذا كان فضاء الحالة محدود ونستخدم خطوات زمنية متقطعة (منفصلة) تُعرف هذه العملية باسم سلسلة ماركوف، بمعنى أخر إنها سلسلة من المتغيرات العشوائية التي تأخذ حالات في فضاء الحالة المحدد.

سنتطرق إلى سلاسل ماركوف المتجانسة والمتجانسة زمنيا لأنها الأسهل ، إذ توجد سلاسل ماركوف غير المتجانسة مع الزمن حيث لا يكون احتمال الانتقال بين الحالات ثابتا ويختلف مع مرور الزمن.

المثال الموضح أدناه يعبر عن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة {A ، B ، C}، تشير الأرقام الموجودة على الأسهم إلى احتمال الانتقال بين هاتين الحالتين.



على سبيل المثال، إذا كنا نريد الانتقال من الحالة "B" إلى "A"، فإن فرصة هذا الانتقال تبلغ 30٪ رياضيا نكتبها ما يلي:

$$P\left(X_n = s_n \setminus X_{n-1} = s_{n-1}\right) = P\left(X_n = A \setminus X_{n-1} = B\right)$$

11-3-1- مصفوفة الاحتمال الانتقالية Probability Transition Matrix :

وهي مصفوفة كل عنصر فيها عبارة عن احتمال انتقال مشروط، وتكتب المصفوفة على شكل $P = \left(P_{ij}\right)$، P_{ij} هو عنصر يمثل احتمالية انتقال العملية إلى الحالة j علما أنها في الحالة i، وتدعى أحيانا بالمصفوفة التصادفية (العشوائية) Stochastic matrix، يمكننا تبسيط وتعميم هذه الانتقالات من خلال إنشاء مصفوفة انتقال احتمالية

لسلسلة ماركوف المعطاة، تحتوي مصفوفة الانتقال على صفوف i وأعمدة j وبالتالي فإن قيم الدليلان i و j تعطي احتمالات الانتقالات من i إلى j .

هناك عدة تعريفات وأنواع مختلفة من المصفوفات العشوائية:

المصفوفة العشوائية (من الجهة اليسرى) (الحالة 1) هي مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة ، كل صف مجموعه 1.

المصفوفة العشوائية (من الجهة اليمنى) (الحالة 2) عبارة عن مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة ، كل عمود مجموعه 1.

المصفوفة العشوائية المزدوجة هي مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة كل صف وعمود مجموعه 1.

وتتميز مصفوفة الانتقال بصفتين هما:

- كل عنصر من عناصر المصفوفة يمثل قيمة احتمالية، أي : $\sum_{\forall j} P(i,j) = 1$

$$0 \le P(i,j) \le 1$$

- مجموع عناصر كل صف من صفوف المصفوفة يساوي الواحد الصحيح (الحالة 1)، أي: $\sum_{j \in T} P_{ij} = 1 \;\; ; \;\; \forall i \in T$
- مجموع عناصر كل عمود من أعمدة المصفوفة يساوي الواحد الصحيح (الحالة 2)، أي: $\sum_{i \in T} P_{ij} = 1 \;\; ; \;\; \forall j \in T$

مصفوفة الانتقال (العبور) لسلسلة ماركوف للمثال السابق تعطى كما يلي:

$$P=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.6\\ 0.4 & 0.4 & 0.1\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad P=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{bmatrix}$$

الحالة 2 الحالة 1

11-3-2- معادلة تشابمان[1]- كولموغوروف[2] Chapman–Kolmogorov equation :

في نظرية العمليات العشوائية الماركوفية معادلة تشابمان-كولموغوروف هي مساواة تتعلق بالتوزيعات الاحتمالية المشتركة لمجموعات مختلفة من الإحداثيات في عملية عشوائية، إذا أردنا ايجاد احتمال انتقال الظاهرة من الحالة i نحو الحالة j بعدد محدود من الخطوات أو المدد الزمنية مقداره n خطوة، نستخدم علاقة تشابمان-كولموغوروف، تم اشتقاق المعادلة بشكل مستقل من قبل البريطاني سيدني تشابمان و الروسي أندري كولموغوروف، تعطى كما يلي:

ليكن: $P_{ij}^{(n)} = P\left(X_n = j \setminus X_0 = i\right)$ احتمال انتقال الظاهرة من الحالة i نحو الحالة j بعدد محدود من الخطوات أو المدد الزمنية هو بالضبط n خطوة:

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[X_{n+m} = j \setminus X_n = k\right]\cdot\left[X_n = k \setminus X_0 = i\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$$

---

[1] - **سيدني تشابمان (1888 – 1970)Sydney Chapman** ، رياضياتي وجيوفيزيائي بريطاني ألهم عمله في النظرية الحركية للغازات والفيزياء الشمسية-الأرضية وطبقة الأوزون على الأرض مجموعة واسعة من الأبحاث على مدى عقود عديدة.

[2] - **أندريه كولموغوروف(1903-1987) kolmogorov Andrey** ، رياضياتي روسي الأصل، التحق بجامعة موسكو سنة 1920، توصل إلى نتيجة هامة حول السلاسل المثلثية بعد اهتمامه بالمنطق الرياضي، بدأ سنة 1925 في ميدان الاحتمالات و تحصل على شهادة الدكتوراه سنة 1931، يعتبر من رواد الحساب الاحتمالي و لقب بإقليدس القرن العشرين.

إذا كانت $P^{(n)}$ مصفوفة تحتوي على $P_{ij}^{(n)}$ ، والتي تعطي:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$$

حالة خاصة: $P^{(2)} = P \cdot P$.

مثال1:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} , \; P^3 = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.744 \\ 0.248 & 0.256 \end{bmatrix} , \; P^5 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

مثال2:

لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء حالة $S = \{1,2\}$ وأن مصفوفة الانتقال الاحتمالي تعطى كما يلي:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

المطلوب: حساب $P\left(X_6 = 2 \setminus X_3 = 1\right)$.

حل المثال2:

باستخدام تعريف عملية ماركوف يكون المطلوب حساب: $P_{12}^{(3)}$ ، أي يكون الاحتمال عبارة عن أحد عناصر المصفوفة $P^3 = P \cdot P \cdot P$.

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{59}{216} & \frac{157}{576} \\ \frac{157}{216} & \frac{419}{576} \end{bmatrix}$$

أي أن الاحتمال المطلوب هو $\frac{157}{216}$ والذي يعني أن العملية التصادفية ستنتقل من الحالة 1 نحو الحالة 2 بثلاث خطوات باحتمال $\frac{157}{216}$.

11-3-3- الاحتمالات الابتدائية initial probabilities:

يسمى الشعاع $P^{(0)} = \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \ldots\ldots, P_m^{(0)}\right)$ بشعاع الاحتمالات الابتدائية (أو التوزيع الابتدائي) لسلسلة ماركوف $\{X_n : n = 0,1,2,3,\ldots\ldots\}$ ذات فضاء حالة $S = \{1,2,\ldots.,m\}$.

ملاحظة:

بالنسبة لحساب شعاع التوزيع الجديد بالنسبة للحالتين 1 و 2 مع $(0 < a,b < 1)$ يكون على النحو الاتي:

$$P = \begin{matrix} & A & B \\ A & 1-a & a \\ B & b & 1-b \end{matrix}$$

$$X_0 = [A \ , B]$$

$$X_1 = X_0 P$$

الحالة 1

$$P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} A & \qquad B \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \end{array} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} , \; X_1 = PX_0$$

الحالة 2

ماذا يحدث لما $P^{(n)}$ ؟ لما $n \to \infty$ أي $P^{(n)} = ?$ ، سنناقش هذا في الفقرات القادمة.

11-3-4- التوزيعات المستقرة ومبرهنة الثبوتية Stationary distributions and the Ergodic theorem :

لأسباب عملية مختلفة من المهم معرفة كيف تتصرف سلسلة ماركوف بعد انقضاء فترة طويلة من الزمن، لكن قبل ذلك وجب توضيح بعض المفاهيم التي تكون على النحو التالي:

11-3-5- المصفوفة الأصلية (البدائية) Primitive matrix :

تسمى المصفوفة P_{ij} بالمصفوفة الأصلية إذا احتوت على قيمة ذاتية $\lambda = 1$ ، وأن $\lambda_1 > |\lambda_i|$ لجميع قيم $i = 2,3,4,....$.

11-3-6- المصفوفة غير القابلة للاختزال والقيمة الذاتية المهيمنة Irreducible Matrix and Dominant Eigenvalue:

نقول عن المصفوفة $A(n \times n)$ أنها غير قابلة للاختزال إذ لم تكن مصفوفة قابلة للاختزال **(reducible)**، هذه الأخيرة تأخذ الشكل التالي:

$$PAP^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$P(n\times n)$ مصفوفة تبديلية[1]، $A_{11}(r\times r)$ ، $A_{22}((n-r)\times(n-r))$ ، $A_{12}(n\times(n-r))$ ،r عدد صحيح موجب، إذا كانت مصفوفة غير قابلة للاختزال لا يمكن وضعها في شكل كتلة مثلثية علوية من خلال التباديل المتزامنة للصف/ العمود.

مثال3 عام (غير متعلق بالمصفوفة العشوائية): لتكن المصفوفة التالية:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

المطلوب: هل هي مصفوفة غير قابلة للاختزال؟

حل المثال3:

لنختار مصفوفة التباديل التالية: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$PMP^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

[1]- مصفوفة تبديلية Permutation matrix هي مصفوفة مربعة تحقق الخواص التالية:
- المعاملات تكون إما 0 أو 1 . هناك 1 فقط في السطر و 1 فقط في العمود.

مثال: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

واضح أنها مصفوفة غير قابلة للاختزال.

نتيجة: في حالة كون أن المصفوفة M غير قابلة للاختزال الرسم البياني المقابل الموجه يكون مرتبطا بقوة strongly connected : $3 \to 2$, $1 \to 3$, $2 \to 1$.

مثال4:

لتكن المصفوفة المبينة في العنصر **(1−3−11)**:
$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

المطلوب: هل هي مصفوفة غير قابلة للاختزال؟

حل المثال4:

لنختار مصفوفة التباديل التالية:
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PMP^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

واضح أنها مصفوفة غير قابلة للاختزال.

نلاحظ أن المصفوفة M غير قابلة للاختزال، كما نلاحظ الرسم البياني للمصفوفة M (الشكل) مرتبطا بقوة strongly connected .

تعريف:

لتكن λ_i $i=1,2,....,n$ قيم ذاتية للمصفوفة $A(n\times n)$ ، ونصف قطرها الطيفي يعرف كما يلي:

$$\rho(A)=\max_i\left(|\lambda_i|\right)$$

مبرهنة بيرون[1]– فوربنيوس[2] للمصفوفات غير قابلة للاختزال Perron–Frobenius theorem for irreducible matrices :

إذا كانت $A=\left(a_{ij}\right)$ ذات قيم غير سالبة وغير قابلة للاختزال فأن:

- احدى قيمها الذاتية موجبة وأكبر من أو تساوي (بالقيمة المطلقة) من جميع القيم الذاتية الأخرى، تسمى هذه القيمة الذاتية " بالقيمة الذاتية المهيمنة " أو القيمة الذاتية لمصفوفة Perron–Frobenius ؛
- هناك شعاع ذاتي موجب يقابل تلك القيمة الذاتية؛
- $\rho(A)$ تساوي القيمة الذاتية المهيمنة للمصفوفة وتحقق:

$$\min_i\sum_j a_{ij}\leq\rho(A)\leq\max_i\sum_j a_{ij}$$

فنقول عن عملية ماركوف أنها غير قابلة للاختزال إذا كان الوصول لأي حالة من حالاتها بانتقال واحد أو بسلسلة من الانتقالات المسموحة.

11–3–7– الحالات المتكررة والعابرة Recurrent and transient states :

[1] - أوسكار بيرون **Oskar Perron (1880 – 1975)** ، رياضياتي ألماني.
[2] - فرديناند جورج فروبينيوس **Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917)** ، رياضياتي ألماني.

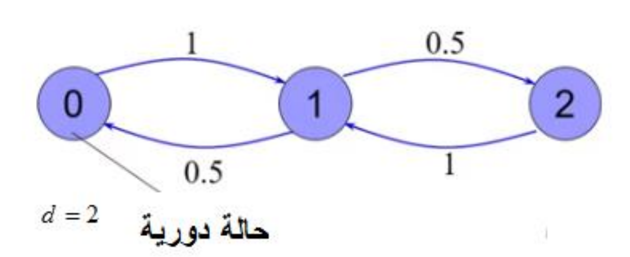
تدعى حالة ماركوف أنها متكررة (عودية) إذا كان من المؤكد أنها ستظهر مرة أخرى بعد أن ظهرت مرة واحدة على الأقل ، غير ذلك تعتبر حالة عابرة.

11-3-8- السلسلة الدورية Periodic Chain :

لتكن P_{ij} مصفوفة الانتقال لسلسلة ماركوف، وأن i و j حالات هذه السلسلة، تكون الحالة i دورية إذا كان بالإمكان العودة إلى الحالة i بفترة $d(i)>1$ ، إذا كان $d(i)=1$ تكون السلسلة غير دورية aperiodic ، نوضح ذلك في الشكل التالي:

من جهة أخرى $d(\mathrm{i})$ هي أكبر قاسم مشترك لمجموعة أوقات العودة المحتملة إلى i بمعنى:

$$d(\mathrm{i})=\gcd\left\{n>0: P_{ii}^{n}>0\right\}$$



$$\begin{aligned}
&0\to1\to0 \qquad (2)\\
&0\to1\to2\to1\to0 \quad (4)\\
&d(0)=\gcd\{2,4\}=2
\end{aligned}$$

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

11-3-9- السلسلة الثبوتية Ergodic chain :

هي العملية التي يكون الانتقال بها ممكنا من حالة واحدة إلى أخرى، ولا يكون ضروريا لهذا الانتقال أن يكون في خطوة واحدة أي أن: $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi$، حيث n تمثل الخطوة و P_{ij}مصفوفة الانتقال، وتكون النهاية موجودة لكل j المستقلة عن i وأن: $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_i = 1$.

مبرهنة:

إذا كانت سلسلة ماركوف أصلية (بدائية) وغير قابلة للاختزال فأن السلسلة تكون ثبوتية.

11-3-10- الاستقرارية وحالة الثبات لمصفوفة ماركوف:

التوزيع π يدعى التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف إذا كان $P\pi = \pi$.

مبرهنة:

نفرض أن P مصفوفة عشوائية غير قابلة للاختزال وغير دورية، فأنه يوجد توزيع مستقر وحيد π، علاوة على ذلك لكل i, j فأن $\lim_{t\to\infty} P_{ij}^{t}$ موجود وتساوي π .

مثلا في حالة مصفوفة الانتقال التالية:

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}$$

لحل التوزيع التالي (π_0, π_1)، نعتبر جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{cases}(1-\alpha)\pi_0+\beta\pi_1=\pi_0\\ \alpha\pi_0+(1-\beta)\pi_1=\pi_1\\ \pi_0+\pi_1=1\end{cases}$$

بعد حل الجملة نجد:

$$\begin{cases}\pi_0=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\\ \pi_1=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\end{cases}$$

فالاستقرارية تعني عدم تغير الصفات الإحصائية للعملية العشوائية بدرجة أو بأخرى بمرور الزمن ، ومن خلال التطبيق يمكن الحصول على الاحتمالات الانتقالية خلال n من النقلات بضرب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية ببعضها n مرة ، نوضح هذه الاستقرارية من خلال الأمثلة التالية ، مع العلم أنه لابد من الرجوع لدروس الجبر الخطي حول كيفية حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية ، وكذلك لدروس التحليل الرياضي لفهم ميكانيزم معادلات الفرق.

تطبيق1:

في دراسة تطور البطالة في منطقة معينة، يعطى حجم المجتمع النشط، ويفترض أنه ثابت (200000 شخص)، مقسم إلى (150000 عامل و 50000 بطال)، نرمز لـ x_t العدد الفعلي للعاملين في بداية السنة t و y_t عدد البطالين في نفس السنة، نفترض أن 90% من العاملين في السنة الموالية يبقون دائما في حالة شغل مقابل10% الذين يحالون إلى بطالة.

نفس الشيء بفرض أن 20% من البطالين في السنة الموالية سيحصلون على عمل مقابل 80% يبقون على نفس الحال (حالة البطالة).

ننمذج هذه الحالة ، شعاع الحالة للجملة $:V_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_{t+1} = 0.9x_t + 0.2y_t \\ y_{t+1} = 0.1x_t + 0.8y_t \end{cases}$

يمكننا التأكد بأن هذه المصفوفة غير قابلة للاختزال:

$$PAP^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \ , \ X_0 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{150000}{200000} \\ \frac{50000}{200000} \end{matrix}$$

بعد سنة التوزيع الجديد يكون على النحو الاتي:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150000 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145000 \\ 55000 \end{pmatrix} \ , \ X_1 = \begin{pmatrix} 0.725 \\ 0.275 \end{pmatrix}$$

بعد سنتين:

$$X_2 = AX_1 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.34 \\ 0.17 & 0.66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.292 \end{pmatrix}$$

إذن: $X_{n+1} = AX_n = A\left(X_{n-1}\right) = A\left(AX_{n-2}\right) = ... = A^{n+1} X_0$

في عملية ماركوف كحل متتالية تعتمد على سابقتها، من بين الأسئلة في عملية ماركوف : ماذا سيحدث في الأمد الطويل إذا أردنا معرفة توقع نسبة البطالة؟

باستخدام ما درسناه في الجبر الخطي، يمكننا ايجاد هذا الوضع بدون تكرار الحسابات والتخمين، هل هناك شعاع X ثابت للاحتمال في هذه الحالة $AX = X$ ؟ بطريقة مكافئة $(A-I)X = 0$ ؟ نبدأ بإيجاد كل X التي تحقق المعادلة، ثم نجد من بين الحلول X الذي يمثل شعاع الاحتمال.

مبرهنة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة:

أ) يوجد شعاع X وحيد، يسمى شعاع احتمال حيث: $AX = X$.

ب) $X_{n+1} = AX_n$ ، وهذا صحيح مهما كان شعاع الاحتمال الذي يستخدم كحالة أولية X_0.

نقترح أولا: حل معادلة الفرق مستخدمين الصيغة $X_t = A^t X_0$:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \left(PD^t P^{-1}\right) X_0$$

ثم ملاحظة ما إذا كان حجم المجتمع **(** الفئة النشطة**)** يقترب من **حالة الاستقرار**، و أخيرا مناقشة هذه العملية بصفة عامة.

نبدأ بأقطرة المصفوفة A.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} ، A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1.7\lambda - 0.7 = 0 \therefore (\lambda_1 = 1), (\lambda_2 = 0.7)$$

والأشعة الذاتية: . $v_2=(-1,1), v_1=(2,1)$

$$P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.7\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفة الانتقال مغلقة (أي لا توجد مجموعات جزئية مغلقة عدا المجموعة $\{1,2\}$، نستنتج أن مصفوفة الانتقال غير قابلة للاختزال (التجزئة) ، كذلك نلاحظ أنها غير دورية aperiodic (d=1)، وبذلك فمصفوفة الانتقال ثبوتية Ergodic (غير قابلة للاختزال وأصلية و غير دورية).

$$X_0=\begin{pmatrix}0.75\\ 0.25\end{pmatrix}=C_1v_1+C_2v_2$$

يمكننا ايجاد المعاملات C_2,C_1 حيث:

$$C_1=\frac{1}{v_1\ \text{مجموع عناصر}}\quad,\quad C_2=\frac{1}{v_2\ \text{مجموع عناصر}}$$

$$C_1=\frac{1}{3}\quad,\quad C_2=\infty$$

$$X_0=\begin{pmatrix}0.75\\ 0.25\end{pmatrix}=C_1v_1+C_2v_2$$
$$X_1=AX_0=A(C_1v_1+C_2v_2)=C_1Av_1+C_2Av_2=C_1\lambda_1v_1+C_2\lambda_2v_2$$
$$X_2=A^2X_0=A^2(C_1v_1+C_2v_2)=C_1A^2v_1+C_2A^2v_2=C_1\lambda_1^2v_1+C_2\lambda_2^2v_2$$

$$X_n=A^nX_0=.........=C_1\lambda_1^nv_1+C_2\lambda_2^nv_2=C_1(1)^nv_1+C_2(0.7)^nv_2$$

يمكننا ملاحظة ذلك:

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{t\to\infty}\left(C_1(1)^t v_1 + C_2(0.7)^t v_2\right) = \lim_{t\to\infty}(C_1 v_1 + 0\cdot v_2) = C_1 v_1$$

$$X_t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

وهذا ما نصت عليه **مبرهنة بيرون– فوربنيوس** : إذا كانت جميع القيم الذاتية الأخرى أصغر من $\lambda_1 = 1$ عندئذ يكون الحد الأول من الصيغة مهيمنا تماما، λ_i^n الأخرى تؤول بسرعة إلى الصفر.

حالة الاستقرار هذه يمكن أن تتأكد إذا كانت المصفوفة A موجبة $P_{ij} \geq 0$ ، عندئذ يكون الشعاع $C_1 v_1$ مركبات موجبة فقط مجموعها 1، وتكون الاحتمالات النهائية لعملية ماركوف.

بطريقة مختصرة نعوض قيمتي α و β في معادلتيهما لنجد π_0 و π_1 .

$$\begin{cases}\pi_0 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{0.2}{0.1+0.2} = \dfrac{2}{3}\\[2ex] \pi_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \dfrac{0.1}{0.1+0.2} = \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

إذن نسبة البطالة المتوقعة في الأمد البعيد لهذه البلدة إذا لم تقم الحكومة بأي إصلاحات في هذه المنطقة من بناء المصانع، فتح مراكز تكوين، ......، هو 33.33% ، نلاحظ أن أقطرة المصفوفة تساعدنا في فهم عملية ماركوف والأنواع المشابهة من معادلات الفرق الخطية.

التطبيق على Maple:

```
> steadyStateVector := proc( P::Matrix )

    #DECLARE LOCAL VARIABLES
    local n, Q, e, QT, b;

    #MAKE THE PROCEDURE SELF CONTAINED BY LOADING REQUIRED PACKAGES INSIDE THE PROCEDURE
    use LinearAlgebra in

    #EXTRACT THE DIMENSION OF THE TRANSITION MATRIX P
    n := Dimension( P )[1];

    #Q = P - I
    Q := P - IdentityMatrix( n );

    #e IS THE VECTOR OF ALL ONES
    e := <seq(1, i=1..n)>;

    #APPEND VECTOR e TO Q AND TRANSPOSE THE RESULT
    QT := Transpose( <Q | e> );

    #b IS THE UNIT VECTOR WITH 1 IN POSITION n+1
    b := UnitVector( n+1, n+1 );

    #SOLVES THE LINEAR SYSTEM QT*pi = b.
    return LeastSquares( QT, b );
    end use:
  end proc:
```

```
> P := Matrix([ [ 0.9,  0.1],
               [0.2,  0.8] ] );
```

$$P := \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Note that the **steadyStateVector** procedure computes pi symbolically. Numerical values for lambda and mu are not required.

```
> pi := steadyStateVector( P );
```

$$\pi := \begin{bmatrix} 0.666666666666666 \\ 0.333333333333334 \end{bmatrix}$$

تطبيق2:

لنفرض أن لدينا شركتين تتنافسان على زبائن في منطقة ما (20000 زبون)، المعلومات المتعلقة بهؤلاء الزبائن في هذه المنطقة موضحة في الجدول التالي:

	A	B	لا شيء
الزبون الذي يذهب الى الشركة A	0.7	0.15	0.3
الزبون الذي يذهب الى الشركة B	0.2	0.8	0.2
الزبون الذي لا يذهب الى أي شركة	0.1	0.05	0.5

نفرض أنه في نهاية الأسبوع 0 من المعلوم أن 10000 زبون ذهبوا إلى A و 8000 زبون ذهبوا الى B و 2000 لم يذهبوا الى أي شركة ، هل يمكننا توقع عدد المتسوقين في كل سوبر ماركت في الأسبوع القادم ، وفي الأمد الطويل؟

صياغة نظم معادلات الفرق:

ليكن X_t نسبة المتسوقين الذين يذهبون الى السوبر ماركت (B,A) أو الذين لم يذهبوا إلى أي واحد منهم.

نشكل مصفوفة

العبور التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.05 & 0.5 \end{pmatrix}$$

يمكننا التأكد بأنها مصفوفة غير قابلة للاختزال:

$$PMP^t=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.05 & 0.5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.5 & 0.1 \\ 0.05 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

لدينا معادلة الفرق التالية: $X_t=AX_{t-1}$, $X_t=[x_t,y_t,z_t]$.

سلسلة ماركوف هي عبارة عن نظام مغلق من مجموعة ثابتة ، يتم توزيعه إلى n حالة مختلفة ، بحيث يتم الانتقال بين الحالات خلال فترات زمنية محددة.

احتمالات الانتقال معروفة بمصفوفة العبور A ، حالة الشعاع X_t (مجموع 1) ، يتم تقديم الحل (بافتراض أن A قابلة للتأقطر)، $X_t=A^tX_0=\left(PD^tP^{-1}\right)X_0$ ، هذه المصفوفات بعد الحساب هي كما يلي:

$$P=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix},\ D^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6^t & 0 \\ 0 & 0 & 0.4^t \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفة الانتقال مغلقة (أي لا توجد مجموعات جزئية مغلقة عدا المجموعة $\{1,2,3\}$، نستنتج أن مصفوفة الانتقال غير قابلة للاختزال (التجزئة) ، كذلك نلاحظ أنها غير دورية aperiodic (d=1)، وبذلك فمصفوفة الانتقال ثبوتية Ergodic (غير قابلة للاختزال وأصلية و غير دورية).

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3$$

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{t\to\infty}\left(C_1(1)^t v_1 + C_2(0.6)^t v_2 + C_3(0.4)^t v_3\right) =$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(C_1 v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3\right) = C_1 v_1 \quad ; \quad C_1 = \frac{1}{3+4+1} = \frac{1}{8}$$

$$X_t = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.5 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

طريقة أخرى:

بمأن P مصفوفة عشوائية غير قابلة للاختزال وغير دورية، فأنه يوجد توزيع مستقر وحيد $\pi(x,y,z)$ ، حيث: $P\pi = \pi$:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.05 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -0.3x + 0.15y + 0.3z = 0 \\ 0.2x - 0.2y + 0.2z = 0 \\ 0.1x + 0.05y - 0.5z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

تحل هذه الجملة بطريقة كرامر أو غوص أو أي طريقة رياضياتية كانت، للتسهيل نستخدم برنامج المابل:

```
solve({ -0.3 x + 0.15 y + 0.3 z = 0 , 0.2 x -0.2 y + 0.2 z = 0, 0.1 x + 0.05 y -0.5 z = 0 , x + y + z = 1}, {x, y, z});
{x = 0.3750000000, y = 0.5000000000, z = 0.1250000000}
```

التطبيق على Maple:

```
> steadyStateVector := proc( P::Matrix )

    #DECLARE LOCAL VARIABLES
    local n, Q, e, QT, b;

    #MAKE THE PROCEDURE SELF CONTAINED BY LOADING REQUIRED PACKAGES INSIDE THE PROCEDURE
    use LinearAlgebra in

    #EXTRACT THE DIMENSION OF THE TRANSITION MATRIX P
    n := Dimension( P )[1];

    #Q = P - I
    Q := P - IdentityMatrix( n );

    #e IS THE VECTOR OF ALL ONES
    e := <seq(1, i=1..n)>;

    #APPEND VECTOR e TO Q AND TRANSPOSE THE RESULT
    QT := Transpose( <Q | e> );

    #b IS THE UNIT VECTOR WITH 1 IN POSITION n+1
    b := UnitVector( n+1, n+1 );

    #SOLVES THE LINEAR SYSTEM QT*pi = b.
    return LeastSquares( QT, b );
    end use:
  end proc:
```

```
> P := Matrix( [ [1-0.3, 0.2,  0.1],
                 [0.15,  1-(0.15+0.05),  0.05],
                 [0.3,  0.2,  1-0.5] ] );
```

$$P := \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Note that the **steadyStateVector** procedure computes pi symbolically. Numerical values for lambda and mu are not required.

```
> pi := steadyStateVector( P );
```

$$\pi := \begin{bmatrix} 0.375000000000000 \\ 0.500000000000000 \\ 0.125000000000000 \end{bmatrix}$$

ثانيا: دراسة الإستقرارية:

تعتمد سلاسل ماركوف في تعريفها على الاحتمال (محصور بين 0 و 1)، لذلك فالعملية تعتبر مستقرة في الامد الطويل، فعملية ماركوف مستقرة بطبيعتها في كل مرة نجد المجموع1 .

لنفرض أن لدينا معادلة الفرق التالية: $U_{t+1} = AU_t$، نريد دراسة سلوكها لما $(n \to \infty)$، بفرض أن A مصفوفة قطرية فأن الحل U_t يكون عبارة عن التوليفة التالية: $U_t = \left(PD^t P^{-1}\right) X_0 = C_1\lambda_1^t v_1 + ... + C_n\lambda_n^t v_n$

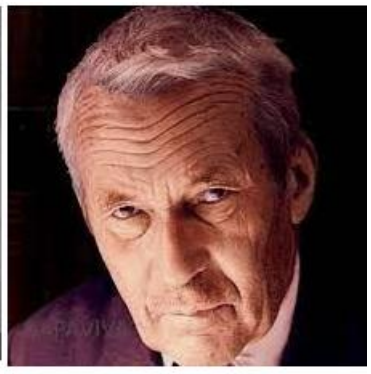
ونمو U_t محكوم بالعامل λ_i^t، لذلك الاستقرار يعتمد على القيم الذاتية للمصفوفة A.

كلما كانت جميع القيم الذاتية تحقق الشرط $|\lambda_i| < 1$ يكون الاستقرار.

وتكون U_t مستقرة بطبيعتها إذا كان $|\lambda_i| \le 1$.

أما إذا كان $|\lambda_i| > 1$ على الأقل لأحدى القيم الذاتية للمصفوفة A تكون حالة عدم الاستقرار.

الأعلام المذكورة في الفصل الحادي عشر:

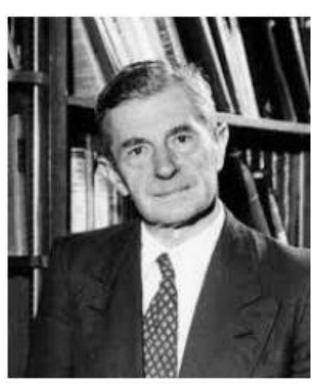


أندريه كولموغوروف
kolmogorov Andrey
(1987-1903)

آندريه ماركوف
Andrey Markov
(1922 - 1856)

فرديناند جورج فروبينيوس
Ferdinand Georg Frobenius
(1917 – 1849)

أوسكار بيرون
Oskar Perron
(1975 – 1880)



سيدني تشابمان
Sydney Chapman
(1970 – 1888)

الفصل الثاني عشر : نظرية صفوف الانتظار

QUEUEING THEORY

تمهيد:

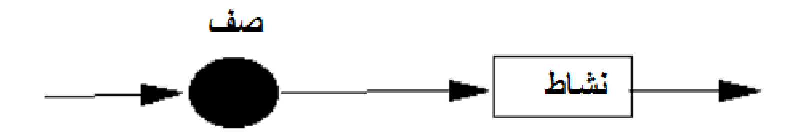
نظرية صفوف الانتظار هي الدراسة الرياضية لخطوط أو صفوف الانتظار ، يتم إنشاء نموذج صف الانتظار بحيث يمكن التنبؤ بأطوال صف الانتظار وزمن الانتظار، تعتبر هذه النظرية بشكل عام فرعا من بحوث العمليات لأن النتائج تُستخدم غالبا عند اتخاذ قرارات العمل بشأن الموارد اللازمة لتقديم الخدمة.

كما نعلم يعد صف الانتظار تجربة شائعة كل يوم، من المنطقي اقتصاديا أن يكون لدينا طوابير على سبيل المثال، كم عدد شبابيك الصرف في سوبر ماركت معين التي قد نحتاجها لتجنب الاصطفاف؟ كم عدد الحافلات أو القطارات التي ستكون مطلوبة إذا تم تجنب / إلغاء صفوف الانتظار؟

في تصميم أنظمة صف الانتظار نحتاج إلى تحقيق توازن بين الخدمة المقدمة للزبائن (صفوف الانتظار القصيرة التي تتضمن العديد من مراكز تقديم الخدمة) والاعتبارات الاقتصادية (ليس هناك الكثير من هذه المراكز).

في الأساس يمكن تقسيم جميع أنظمة الصف (الطابور) إلى أنظمة فرعية فردية تتكون من كيانات تصطف في صف لبعض الأنشطة (كما هو موضح أدناه).

الشكل (12-1): صف الانتظار



تم تقديم نظرية صف الانتظار لأول مرة في أوائل القرن العشرين من قبل المهندس الدانماركي[1] Agner Krarup Erlang ، عمل إرلانغ في بورصة كوبنهاجن الهاتفية وأراد تحليل عملياته وتحسينها، لقد سعى إلى تحديد عدد الدوائر اللازمة لتوفير مستوى مقبول من الخدمة الهاتفية ، بحيث لا يكون الأشخاص " قيد الانتظار" (أو في طابور الهاتف) لفترة طويلة جدا، كان مهتما أيضا بمعرفة عدد مشغلي الهاتف اللازمين لمعالجة حجم معين من المكالمات.

بلغ تحليله الرياضي ذروته في بحثه عام 1920 بعنوان " أوقات انتظار الهاتف"، والتي كانت بمثابة الأساس لنظرية صف الانتظار التطبيقية، تسمى الوحدة الدولية لحركة الهاتف بـ Erlang تكريما له.

12-1- مصطلحات أساسية Basic Terminology :

12-1-1- نموذج صفوف الانتظارQueuing Model :

إنه نموذج مناسب يستخدم لتمثيل مسألة موجهة نحو الخدمة، حيث يصل الزبائن بشكل عشوائي لتلقي بعض الخدمات، ويكون زمن الخدمة أيضا متغيرًا عشوائيًا.

12-1-2- الوصول Arrival:

يمكن الإشارة إلى النمط الإحصائي للوصول من خلال التوزيع الاحتمالي لعدد الوافدين في فترة زمنية.

[1] - أغنر كراروب إرلانغ (1878 – 1929) Agner Krarup Erlang ، احصائي ومهندس و رياضياتي دانماركي، كان له الفضل في إيجاد نظرية الطابور.

12-1-3- زمن الخدمة Service Time:

يُعرف الزمن الذي يستغرقه مركز الخدمة لإكمال الخدمة باسم زمن الخدمة.

12-1-4- مركز الخدمة Server:

إنها آلية يتم من خلالها تقديم الخدمة.

12-2- خصائص صف الانتظارQueue Discipline :

إنه الترتيب الذي يتم من خلاله تقديم خدمة لأعضاء صف الانتظار، على سبيل المثال إنها القاعدة التي يتم بموجبها اختيار الزبائن للخدمة عند تشكيل صف الانتظار، أكثر الأنواع شيوعا هي:

1. من يصل أولا يخدم أولا (FCFS).
2. من يصل أخرا يخدم أولا (LCFS).
3. اختيار الخدمة بترتيب عشوائي (SIRO) Selection for service in Random order .

12-2-1- صف الانتظار (طوابير الانتظار) (Queue (Waiting lines:

تُعرف مجموعة العناصر التي تنتظر تلقي الخدمة(بما في ذلك تلك التي تتلقى الخدمة) باسم صف الانتظار.

12-2-2- متوسط الزمن الذي تستغرقه الوحدة في صف الانتظار (mean waiting time in the queue (W_q:

هو متوسط الزمن الذي يقضيه الزبون في صف الانتظار قبل تقديم الخدمة.

12-2-3- متوسط زمن الانتظار في النظام mean waiting time in the system (W):

متوسط زمن الانتظار في النظام، أي متوسط طول الوقت من لحظة وصول الزبون حتى مغادرته للنظام (يُسمى أيضًا وقت الإقامة).

12-2-4- متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار (mean number of customers in the queue (L_q:

متوسط عدد الوحدات (الزبائن) الموجودة في صف الانتظار.

12-2-5- متوسط عدد الزبائن(عدد الوحدات) الموجودة في النظام mean number of System (L)

متوسط عدد الزبائن في النظام، أي بما في ذلك جميع الزبائن المنتظرين في صف الانتظار وكل من يتم خدمتهم.

12-2-6- متوسط زمن الخمول (P_0) mean idle time:

متوسط الزمن الذي يظل فيه النظام خاملا.

12-2-7- متوسط عدد الزبائن أثناء الخدمة L_s mean number of customers in service

متوسط عدد الوحدات (الزبائن) الموجودة أثناء تأدية الخدمة.

12-2-8- متوسط الزمن الذي تستغرقه الوحدة في صف الانتظار W_s mean time a customer spends in service

هو متوسط الزمن الذي يقضيه الزبون أثناء تقديم الخدمة.

12-2-9- الطابور المجمع أو طابور الدفعات Bulk Arrivals :

إذا قام أكثر من زبون واحد بدخول النظام في نفس اللحظة فإنه يُعرف باسم الوصول الجماعي(لا نتطرق في فصلنا لهذا النوع).

12-3- تصنيفات أنظمة صف الانتظار

نستخدم الرموز التالية:

λ Lamda هو متوسط عدد الوافدين في كل فترة زمنية ، أي متوسط معدل الوصول.

μ: متوسط عدد الزبائن الذين تم خدمتهم في كل فترة زمنية ، أي متوسط معدل الخدمة.

يوجد نظام تدوين قياسي يعرف بترميز كيندال[1] Kendall لتصنيف الأنواع المختلفة من أنظمة الطابور أو العقد، يتم تصنيف عقد صف الانتظار باستخدام الترميز A/B/C/D/E حيث:

يمثل A التوزيع الاحتمالي لعملية الوصول.

يمثل B التوزيع الاحتمالي لعملية الخدمة.

يمثل C عدد القنوات (تقديم الخدمة).

يمثل D الحد الأقصى لعدد الزبائن المسموح به في نظام الانتظار (إما يتم تقديم الخدمة أو انتظار الخدمة).

يمثل E الحد الأقصى لعدد الزبائن.

الخيارات الشائعة لـ A و B هي:

M لتوزيع وصول بواسون ، التوزيع الأسي بين الترددات أو التوزيع الأسي لوقت الخدمة.

D هي سعة صف الانتظار ، ويتم حذفها إذا كانت غير محدودة.

G للتوزيع العام (ولكن بمتوسط وتباين معروفين).

إذا لم يتم تحديد D و E ، فمن المفترض أنهما لانهائيان.

[1] - **ديفيد جورج كيندال (1918 - 2007) David George Kendall** ، لا ينبغي الخلط بينه وبين موريس كيندال (احصائي بريطاني كذلك) ، جورج إحصائي بريطاني وأحد المتخصصين في تطبيق حساب الاحتمالات على تحليل البيانات والعمليات العشوائية، معروف بتدوين كيندال الذي قدمه في مجال نظرية طوابير الانتظار.

D: هو نظام الانتظار في صف الانتظار ، ويفترض استخدام FIFO (ما دخل أولا يقدم له الخدمة أولا).

على سبيل المثال، كيفية عمل ماكينة الصراف الأليATM .

يمكن أن يخدم: زبون واحد في كل مرة بترتيب الوارد أولا يُخدم أولا ، مع عملية وصول موزعة عشوائيا ووقت توزيع الخدمة ، سعة صف انتظار غير محدودة ، وعدد غير محدود من الزبائن المحتملين.

تصف نظرية خط الانتظار هذا النظام بأنه صف انتظار من نوع (M / M / 1) يرمز الحرف "M" هنا إلى الماركوفي ، وهي عملية إحصائية لوصف العشوائية، وهو أبسط نظام اصطفاف ، توزيع الوصول يستخدم قانون بواسون ، والتوزيع الأسي يستخدم أثناء وقت الخدمة ، وتوجد قناة واحدة (مركز خدمة واحد).

12-4- تطبيقات نظرية صفوف الانتظار

تعتبر نظرية صف الانتظار قوية لأن انتشار مواقف صف الانتظار يعني وجود تطبيقات لا حصر لها ومتنوعة لهذه النظرية.

على سبيل المثال لا الحصر نجد:

- الاتصالات.
- وسائل النقل.
- الخدمات اللوجستية.
- المالية.

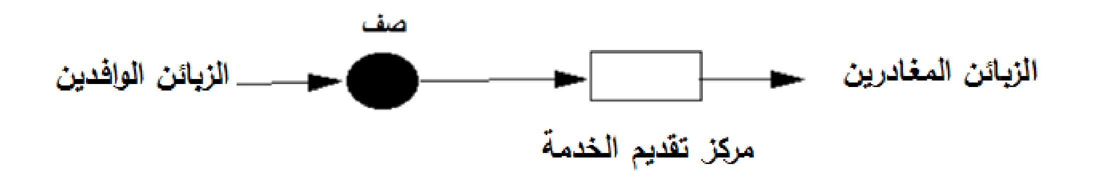
- خدمات الطوارئ.
- هندسة صناعية.
- إدارة المشاريع.

12-5- إنشاء صف الانتظار Creation of a waiting list:

نظام الانتظار له خصائص عديدة عادة يتألف من الزبائن الذين يتابعون بعضهم البعض ويطلبون خدمة (انظر الشكل 12-2)، يمكن أن يكون الزبائن:

الأفراد، المكالمات الهاتفية، الإشارات الكهربائية، المركبات، الحوادث، الاضطرابات الجوية ...، ويمكن أن تكون الخدمة خادما بشريا، مبادلا هاتفيا، خادم كمبيوتر، شركة تأمين، الأرصاد الجوية.

الشكل (12-2): صف الانتظار2



12-5-1- تدفق الوافدين Arrivals flow

يمكن أن يكون الوصول منتظما (حتميا) أو عشوائيا، فرديا كان أم جماعيا، تأتي من مجتمعات مختلفة أو مقسمة إلى عدة صفوف، سيتعين علينا تعديل عدد أوقات الوصول، في حالات معينة علينا أن نأخذ في الاعتبار حجم المجتمع المحتمل.

12-5-2- شكل الخدمة

تتكون الخدمة من مركز واحد أو أكثر، والتي يمكن ترتيبها كما يلي:

أولا : مراكز خدمة موازية parallel servers

يتعلق هذا الموضع بصفوف الانتظار حيث يكون للزبائن خيار لمركز الخدمة: صفوف انتظار الأشخاص في إدارة تقدم العديد من الخدمات، وصفوف انتظار المستهلكين في الانتظار عند عدادات الدفع في سوبر ماركت الشكل 2– أ.

ثانيا: مراكز خدمة تسلسلية serial servers

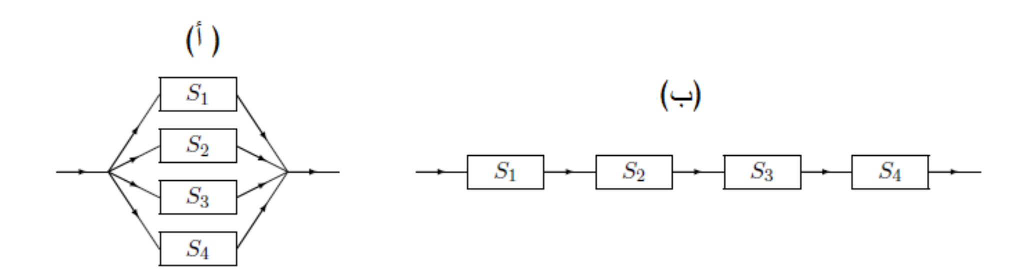
يتعلق هذا الأمر بخدمات السلسلة: خدمة تقديم الطعام ، تقديم بطاقات الرمادية الخاصة بالسيارات في الولاية (تتطلب مرحلتين: التسجيل ثم تحضير البطاقات) ، الفحص الطبي في المستشفى (يتطلب عدة فحوصات متتالية)، خطوط انتاج مراقبة الجودة ... الشكل: 2 (ب).

ثالثا: مركز خدمة شبكي:

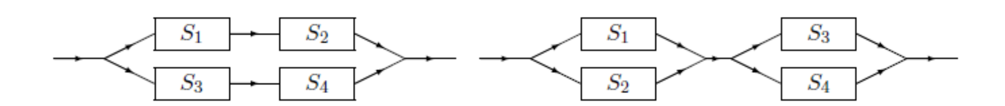
هذا الترتيب أكثر تعقيدا وواقعية: تبادلات الاتصالات، شبكات الكمبيوتر والإنترنت... الشكل: (12–3).

سيتعين علينا أيضا تصميم أوقات الخدمة.

شكل (12–3): مراكز خدمة على التسلسل وعلى التوازي



شكل (12–4): مراكز خدمة شبكية



12–6– سعة النظام System capacity

العديد من أنظمة الانتظار لديها غرفة انتظار ذات سعة محدودة، سيكون هناك رفض الوافدين عند مدخل النظام عندما تكون هذه الغرفة ممتلئة، هذا العامل مهم بشكل خاص في دراسة صفوف الانتظار الترادفية، على سبيل المثال يتم إدخال سعة محدودة بين خدمتين متتاليتين، عندما تصل هذه الغرفة إلى التشبع يحدث مأزق في الخدمة الأولى.

نفرض دراسة صف انتظار باستخدام مركز خدمة ونظام FCFS أو FIFO وغرفة انتظار ذات سعة لا نهائية (وبالتالي بدون الحد على مستوى الوافدين)، نتحدث هنا عن M / M / 1.

12–7– نمذجة الوصول Modeling arrivals:

قبل التطرق لنمذجة قوانين الوصول وجب ذكر أولا التوزيعات الاحتمالية المستخدمة ثم العروج في توضيح العملية البواسونية وهي أساس فهم فلسفة نظرية صفوف الانتظار.

12–7–1– توزيع بواسون[1] Poisson distribution

[1] - سيميون دينيس بواسون (1781- 1840) Siméon Denis Poisson ، رياضياتي وفيزيائي فرنسي.

أولا : أهميته:

إن قانون بواسون له أهمية كبيرة في التطبيقات الاحصائية المتعددة نذكر منها :

- عدد الزبائن الذين يدخلون الى مصرف معين خلال 30 دقيقة مثلا.
- عدد المسافرين الذين يصلون الى المحطة خلال 20 دقيقة.
- عدد الأخطاء المطبعية التي يتم العثور عليها من صفحات كتاب معين.
- عدد المكالمات الهاتفية المستلمة خلال نصف ساعة واحدة.
- عدد حوادث المرور التي تحدث خلال يوم واحد.
- عدد الجسيمات الصادرة في الثانية من مادة مشعة.

ولتوزيع بواسون تطبيقات واسعة، فهو يقدم بشكل عام نموذجا للمعلومات الإحصائية التي تأخذ شكل تعداد لحوادث نادرة الوقوع، حيث يمثل المتغير العشوائي X عدد الحوادث النادرة الملحوظة في وحدة قياس معينة زمنيا، بينما يمثل λ معدل أو متوسط عدد مرات ظهور تلك الأحداث في وحدة القياس، كذلك يستخدم توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي عندما ما تكون n كبيرة $(n \to \infty)$ واحتمال النجاح ضئيل يقترب من الصفر $(p \to 0)$.

تعريف:

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق توزيع بواسون بوسيط $\lambda > 0$ ، ونكتب $x \mapsto p(x;\lambda)$ ، إذا كانت له دالة الاحتمال التالية:

$$p(x;\lambda)=P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!};\quad x_i=0,1...$$ ، نلاحظ أن :

$$p(x;\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}p(x;\lambda)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}(e^{\lambda})=1$$

لأن $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (سلسلة صحيحة série entière)

مثال 1: ليكن متوسط عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها مستقبل المكالمات في مركز هاتفي معين ما بين الساعة 9^{سا} و 10^{سا} هو 1.5 مكالمة في الثانية .

المطلوب : حساب احتمال أن يكون لدينا ما بين (10سا و 33د) و (10سا و 34د):

1) عدم وجود أي مكالمة هاتفية؟

2) مكالمة هاتفية واحدة؟

3) مكالمتان هاتفيتان ؟

4) ثلاث مكالمات هاتفية على الأقل؟

حل المثال 1:

إن عدد المكالمات الهاتفية x هو متغير عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda=1.5$ ، وتكون له دالة الاحتمال التالية:

$$p(x;1.5)=P(X=x)=e^{-1.5}\frac{(1.5)^x}{x!};\quad x_i=0,1...$$

1) احتمال عدم تلقي أي مكالمة:

$$p(0;1.5) = P(X = 0) = e^{-1.5}\frac{(1.5)^0}{0!} = 0,2231$$

2) احتمال تلقي مكالمة واحدة:

$$p(1;1.5) = P(X = 1) = e^{-1.5}\frac{(1.5)^1}{1!} = 0,3347$$

3) احتمال تلقي مكالمتين:

$$p(2;1.5) = P(X = 2) = e^{-1.5}\frac{(1.5)^2}{2!} = 0,2510$$

احتمال تلقي ثلاث مكالمات على الأقل:

$$p(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - \left[p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)\right] = 1 - \left[0,2231 + 0,3347 + 0,2510\right] = 0,1912$$

مثال 2: يستلم أحد المصارف شيكات بدون رصيد بمعدل 8 شيكات في اليوم الواحد،

المطلوب : أ- كتابة القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي.

ب-ما هو احتمال أن يستلم المصرف 4 شيكات بدون رصيد في يوم ما؟

ت-ما هو احتمال أن يستلم المصرف في يوم ما شيكين على الأقل بدون رصيد ؟

حل المثال 2:

نفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الشيكات المستلمة بدون رصيد في اليوم الواحد، وعليه فأن:

أ- القانون الاحتمالي:

$$p\left(X=x\right)=\begin{cases} e^{-8}\dfrac{8^{x}}{x!} & x_{i}=0,1,2,.... \\ 0/w \end{cases}$$

ب-احتمال أن يستلم المصرف 4 شيكات بدون رصيد في يوم ما

$$p\left(4;8\right)=e^{-8}\frac{8^{4}}{4!}=0.0572$$

ت-احتمال أن يستلم المصرف في يوم ما شيكين على الأقل بدون رصيد

$$p\left(X\geq 2\right)=1-p\left(X<2\right)=1-\left[p\left(X=0\right)+p\left(X=1\right)\right]=1-e^{-8}\left[\frac{8^{0}}{0!}+\frac{8^{1}}{1!}\right]=0.997$$

ثانيا: التوقع والتباين لقانون بواسون

مبرهنة:

إذا كان X متغير عشوائي بواسوني وسيطه λ فأن :

$$\mu=E\left(X\right)=\lambda..........(1)$$
$$\sigma^{2}=V\left(X\right)=\lambda........(2)$$

ثالثا: تقريب القانون الثنائي بقانون بواسون

ليكن X متغيرا عشوائيا يتوزع وفق القانون الثنائي والذي دالته الاحتمالية :

$$f(x)=P(X=x)=C_{n}^{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \quad ; \quad x_{i}=0,1...n$$

تصادفنا في بعض التطبيقات الاحصائية تجارب وفقا للقانون الثنائي بحيث تكون n كبيرة واحتمال النجاح p صغير وقد يبقى الجداء np (التوقع الرياضي لهذا المتغير) مساويا لعدد ثابت λ ، أي أن متوسط عدد مرات ظهور حادثا ما (النجاح) وليكن E

وذلك وفقا لمتواليات مختلفة من التكرارات (كل منها يتألف من n تكرار مستقلا) يبقى ثابتا، إن إيجاد احتمالات القيم ل X تبدو شاقة وغير متاحة في بعض هذه الحالات (التجارب الثنائية) خاصة أن الجداول الاحصائية المتعلقة بالقانون الثنائي بالنسبة للقيم الكبيرة ل n و القيم الصغيرة ل p $(n>30;\quad p<0.01)$ ، لذا لابد من إيجاد صيغة مشابهة للقانون الثنائي التي تسمح بشكل تقريبي ايجاد احتمالات الحوادث $(X=x)$ عندما تكون n كبيرة واحتمال النجاح p صغير و $\lambda = np$ ، وفقا للقانون الثنائي نعتبر $p=\frac{\lambda}{n}$ حيث نجد :

$$P(X=x)=C_n^x\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}=\frac{n(n-1)(n-2).....(n-x+1)}{x!n^x}(\lambda)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}(\lambda)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\to 1;\quad n\to\infty$$

بينما $$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}=\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}\right]^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\to e^{-\lambda}$$

و بملاحظة $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$ (من التحليل الرياضي)[1]

---

[1]- النشر المحدود للوغاريتم الطبيعي ... $Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-.....\pm\frac{x^k}{k}\mp...$ ، والمفكوك صحيح في حالة ما اذا كان $|x|<1$ ، اذا كان $Ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=-\frac{\lambda}{n}-\frac{\lambda^2}{2n^2}-\frac{\lambda^3}{3n^3}-.......$ ، واذا كانت n كبيرة فأن $Ln\,\mathrm{b}(0;n,p)=n\,Ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)=-\lambda-\frac{\lambda^2}{2n}-\frac{\lambda^3}{3n^2}\approx-\lambda$ ، اذن : $\mathrm{b}(0;n,p)=-\lambda$.

أما $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}=1$ (لأن x محدود)

ينتج عندما $n\to\infty$ مع بقاء λ ثابتة (أي أن $p\to 0$) ما يلي:

$p(X=x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$.

يفيدنا الاثبات السابق بأن الاحتمالات التي تعطيها دالة الاحتمال البواسونية مساوية تقريبا للاحتمالات التي تعطيها دالة الاحتمال للقانون الثنائي شريطة أن تكون n كبيرة و يكون الجداء $\lambda=np$ صغيرا نسبيا ويكون التقريب جيد إذا كان $(np<5;\quad n\geq 30)$

مثال 3:

إذا كان احتمال أن يعاني شخص من رد فعل سيئ عند حقنه بمصل معين هو 0.002 ، أوجد احتمال أن يكون من بين 1000 شخص سيحقنون بالمصل:

1- شخصان سيعانون من رد فعل سيئ؟
2- ثلاثة أشخاص على الأقل سيعانون من رد فعل سيئ؟.

حل المثال 3:

اذا فرضنا أن X يدل على عدد الأشخاص الذين سيعانون من رد فعل سيئ من بين 1000 شخص فأنه يكون ل X التوزيع الثنائي بوسيطين n=1000 و p=0.002 ، ولكن من المفترض أن يكون الرد السيئ حدثا نادرا ، فأنه يمكننا افتراض أن X خاضع لقانون بواسون أي أن : $p(X=x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$ حيث $\lambda=np=(1000)(0.002)=2$

$(np<5)$ ، وهذا يسمح لنا بتطبيق قانون بواسون كتقريب للقانون الثنائي.

$$(1)\ p(X=2)=\frac{2^2 e^{-2}}{2!}=0.270$$

$$(2)\ p(X\geq 3)=1-p(X<3)=1-\left[p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)\right]$$
$$=1-\left[0.1353+0.270+0270\right]=0.3247$$

مثال 4: إذا كان 0.2% من الكتب المجلدة بنوع معين من التجليد يكون بها عيوب في التجليد ، فما هو احتمال أن 5 كتب مجلدة من 400 كتاب بها عيوب في التجليد؟

حل المثال 4:

$x=5$, n = 400 , λ= np =(400)(0.002)= 0.8<5 ; $p(X=5)=\frac{(0.8)^5 e^{-0.8}}{5!}=0.001227$

12-7-2- التوزيع الأسي Exponential distribution

أولا: مفهوم التوزيع الأسي

بعد هذا التوزيع حالة خاصة من توزيع غاما[1] عندما تكون ($\alpha = 1$)، ويستخدم في معالجة بعض التطبيقات الإحصائية مثل تقدير مدة حياة بعض الأجهزة، فترات الانتظار، درجات الحرارة العظمى والصغرى...وبافتراض أن لدينا متغير عشوائي مستمر (X) يتوزع وفقا للتوزيع الأسي، فإن دالة التوزيع الاحتمالي تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

وبوضع $\lambda = \frac{1}{\beta}$، يصبح لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

والمنحنى البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي مبين وفق الشكل الاتي :

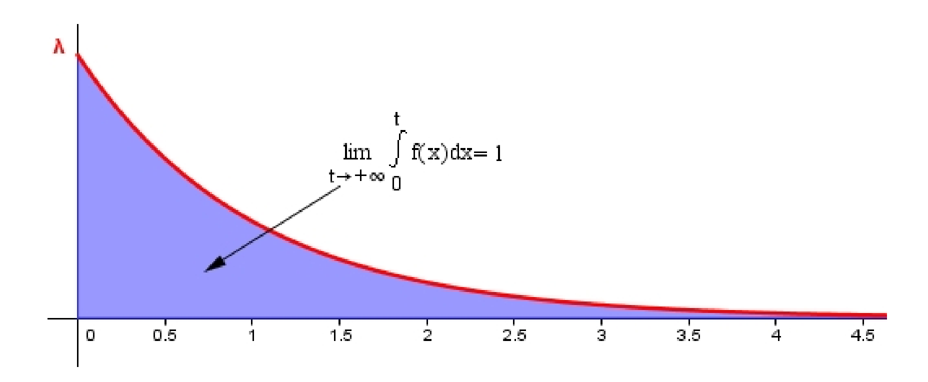
الشكل (12-5): التوزيع الأسي

[1] يعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية كالتوزيع الأسي مثلا، ويعالج هذا التوزيع عادة المتغيرات العشوائية التي تكون قيمتها موجبة دائما، ومن أمثلة هذا التوزيع فترات الانتظار على سبيل إجراء تجارب الحياة، الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب بمرض مزمن، تصميم الطلبيات في منتج ما ،.....، وبافتراض أن لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن X ، يتوزع وفق توزيع غاما، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 / w \end{cases}$$

مع العلم أن $\alpha, \beta > 0$

حيث أن α و β **تمثل** معلمات هذا التوزيع.



أما التابع التوزيعي الأسي فهو كما يلي:

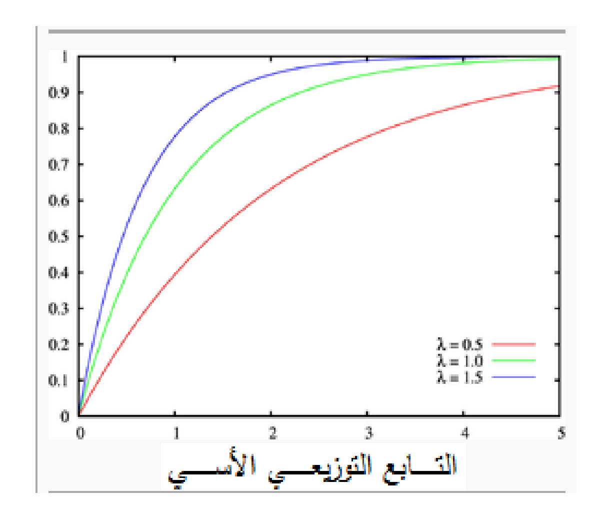
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x=1-e^{-\lambda x}$$

ومنه نجد

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & ;x\geq 0\\ 0 & ;x<0\end{cases}$$

والمنحنى البياني للتابع التوزيعي للتوزيع الأسي مبين وفق الشكل الاتي :

الشكل (12−6): التابع التوزيعي للتوزيع الأسي



ثانيا: خواص التوزيع الأسي

خواص هذا التوزيع نوجزها في هذه النقاط:

$$1)\ p(x>b)=e^{-\lambda a}\ ,\quad 2)\ p(x<a)=1-e^{-\lambda a}\ ,\quad 3)\ p(a\le x\le b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$$

الاثبات :

$$1)\ p(x>b)=\int_b^t f(x)\ dx=\int_b^t \lambda e^{-\lambda x}\ dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_b^t=-e^{-\lambda t}+e^{-\lambda b}$$

$$p(x>b)=\lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-\lambda t}+e^{-\lambda b}\right)=e^{-\lambda b}$$

$$2)\ p(x<a)=\int_0^a f(x)\ dx=\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\ dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a=1-e^{-\lambda a}$$

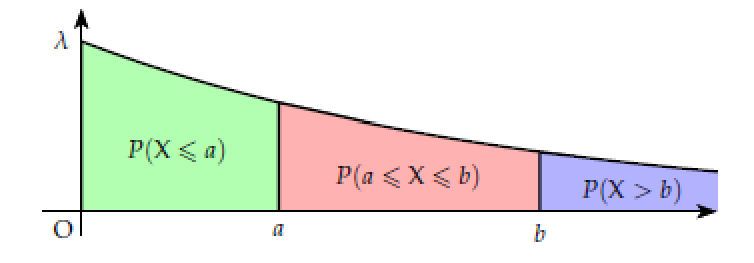
$$3)\ p(a\le x\le b)=p(x\le b)-p(x\le a)=\int_0^b f(x)\ dx-\int_0^a f(x)\ dx$$

$$=\int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\ dx-\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\ dx$$

$$=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^b-\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a$$

$$=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$$

الخواص الثلاثة السابقة نبينها وفق الرسم البياني الاتي:



ثالثا: التوقع والتباين للتوزيع الأسي

مبرهنة :

اذا كان X متغيرا عشوائيا له القانون الأسي فأن :

$$\mu = E\left(X\right) = \frac{1}{\lambda}............................(1)$$

$$\sigma^2 = V\left(X\right) = \frac{1}{\lambda^2}..........................(2)$$

الاثبات :

من تعريف متوسط متغير عشوائي فأن:

$$(1)\quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f\left(x\right)\, dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئة حيث: $\mu = x \Rightarrow du = dx \;\;,\;\; d\nu = e^{-\lambda x} \Rightarrow \nu = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$$E(X) = \lambda\left\{\left[-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx\right\} = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$(2)\quad V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f\left(x\right)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئة حيث: $\mu = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \;\;,\;\; d\nu = e^{-\lambda x} \Rightarrow \nu = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$$E(X^2)=\lambda\left\{\left[-\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\infty}+\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}\,dx\right\}=0+2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda}E(X)=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

مثال5:

نفرض أن زمن مكالمة هاتفية مقاسة بالدقائق هو متغير عشوائي أسي وسيطة $\lambda=\frac{1}{20}$، يصل الشخص A إلى حجرة الهاتف، وفي نفس اللحظة يمر قبله شخص آخر (دخل إلى الحجرة).

1) ما هو احتمال أن الشخص A ينتظر أكثر من 20 دقيقة؟

2) ما هو احتمال أن الشخص A ينتظر ما بين 20 و 40 دقيقة؟

حل المثال5:

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل زمن المكالمة الهاتفية X هو متغير أسي وسيطه $\lambda=\frac{1}{20}$.

1) الحادث "الانتظار الأكثر من 20 دقيقة هو (X>20) واحتماله هو:

$$1)\, p(x>20)=e^{-\frac{1}{20}(20)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

2) الحادث "الانتظار ما بين 20 و 40 دقيقة "هو $(20<x<40)$ والذي احتماله هو

$$2)\, p(20<x<40)=e^{-\frac{20}{20}}-e^{-\frac{40}{20}}=e^{-1}-e^{-2}$$

رابعا: مدة حياة بدون شيخوخة (متغير عشوائي بدون ذاكرة)

خاصية المتغيرات العشوائية الأسية هي عدم وجود ذاكرة ، مثلا المتغير العشوائي X الذي يعطي مدة حياة جهاز في وحدة زمنية مختارة ، الحادث " مدة الحياة لا تتجاوز y سنة " هو الحادث $\left(x\in[0,y]\right)$ الذي نرمز له ب $\left(x\le y\right)$ وحادثه العكسي هو الحادث " مدة الحياة تتجاوز على الأقل y سنة " والذي نعبر عنه ب $\left(x>y\right)$ الذي نرمز له ب $\left(x\in]0,+\infty[\right)$.

لنهتم بالحادث " مدة الحياة هي على الأقل t+h سنة " علما أن الجهاز قد عاش t سنة، نعبر عن هذا الحادث ب: $p\left(\left(x>t+h\right)\backslash\left(x>t\right)\right)$

قضية:

ليكن X متغير عشوائي له القانون الأسي بوسيط λ ، t,h عددين حقيقين موجبين فأن:

$p\left(\left(x>t+h\right)\backslash\left(x>t\right)\right)=p\left(x>h\right)$ ، في هذه الحالة نقول أن المتغير العشوائي بدون ذاكرة.

الاثبات: (تطبيق الاحتمال الشرطي)

$$p\left(\left(x>t+h\right)\backslash\left(x>t\right)\right)=\frac{p\left(\left(x>t+h\right)\cap\left(x>t\right)\right)}{p\left(x>t\right)}=\frac{p\left(x>t+h\right)}{p\left(x>t\right)}=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda h}=p\left(x>h\right)$$

مثال6:

مدة الحياة لبعض الأجهزة الالكترونية هي متغير عشوائي X له القانون الأسي وسيطه $\lambda = 0.01$.

1) أحسب احتمال أن جهاز ما يحدث له عطب قبل 5 سنوات ؟
2) أحسب احتمال أن جهاز ما لا يحدث له عطب قبل سنة ؟
3) أحسب احتمال أن جهاز ما يبقى يشتغل حتى 6 سنوات علما أنه أشتغل 5 سنوات ، ما ذا تلاحظ ؟

حل المثال 6:

1) لنبحث عن احتمال أن مدة الجهاز تكون أصغر من 5 سنوات $p(X < 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-0.05}$.
2) لنبحث عن احتمال أن مدة الجهاز تكون أكبر من سنة $p(X > 1) = e^{-\lambda} = e^{-0.01}$.
3) احتمال أن جهاز ما يبقى يشتغل حتى 6 سنوات علما أنه أشتغل 5 سنوات هو

$$p((X \geq 6) \backslash (X \geq 5)) = p(X \geq 1) = e^{-0.01}$$

نلاحظ أن هذه النتيجة هي نفس النتيجة المحصل عليها من خلال السؤال الثاني ، وهذا ما يثبت خاصية عدم الذاكرة عند القوانين الأسية .

12-7-3- توزيع إيرلانغ Erlang distribution :

هو من التوزيعات المستمرة ، أهميته تكمن أن له علاقة بالتوزيع الأسي وتوزيع غاما (حالة خاصة من هاذين التوزيعين)، إبتكره المهندس الدانماركي إيرلانغ بعد نمذجته لعدد المكالمات الهاتفية المتزامنة، له معلمتين k : عدد صحيح، و λ : (معلمة الشدة).

نستخدم أحيانا معلمة بديلة حيث نأخذ بعين الاعتبار معامل المقياس: $\theta = \frac{1}{\lambda}$، إذا كان k مساويا للواحد فتوزيع إيرلانغ يصبح توزيعا أسيا، كذلك توزيع إيرلانغ هو حالة خاصة من توزيع غاما بحيث أن k عدد صحيح خلافا لغاما الذي هو عدد حقيقي موجب أكبر أو يساوي 1، دالته الاحتمالية تأخذ الشكل التالي:

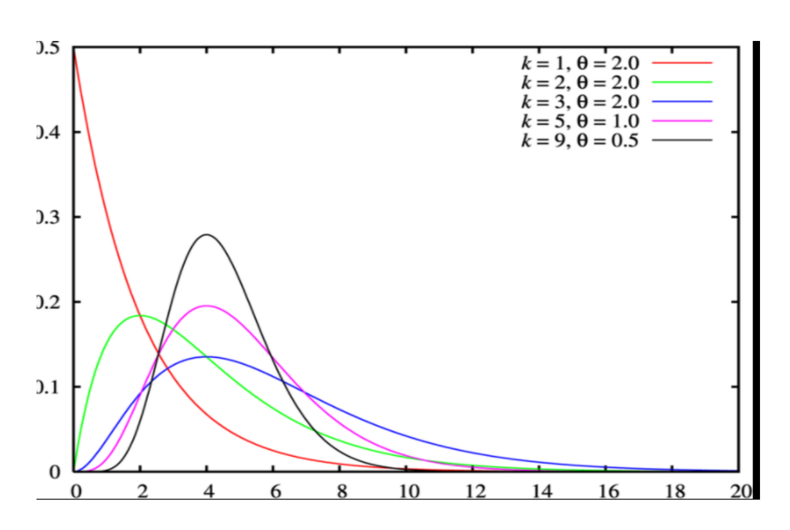
$$f(x;k,\lambda) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \quad , \quad x > 0$$

متوسطه وتباينه يعطى كالتالي:

$$E(X) = \frac{k}{\lambda} \quad , \quad V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$$

شكله البياني يعطى كما يلي:

الشكل (12−7): توزيع إيرلانغ



12−8 العملية البواسونية: Poisson Process

نرمز ل $N(t)$ عدد الحوادث المتدفقة في مجال زمني $[0,t]$ ، هذه العملية لها مسار درجي (stairs) أنظر الشكل **(12−8)**، نهتم بالحوادث المتدفقة خلال لحظات زمنية $(t_1,t_2,..)$ ، في كل لحظة زمنية التعداد يزداد ب 1.

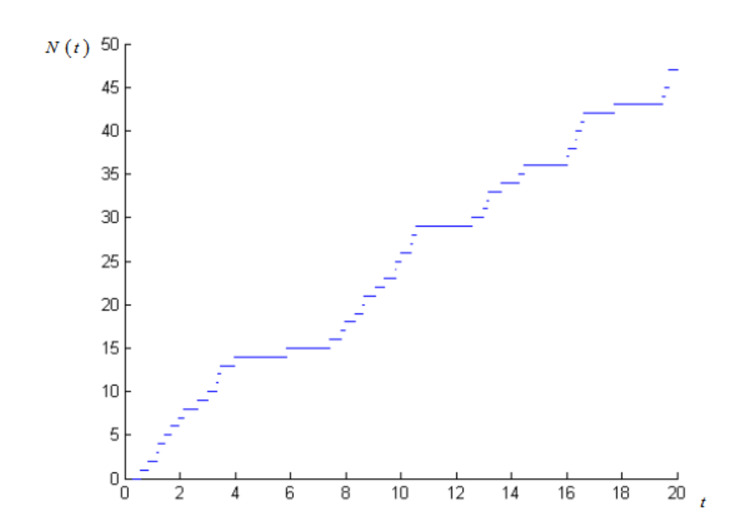
$$N(t)=0 \;\; ; \;\; t<t_1$$
$$N(t)=1 \;\; ; \;\; t_1<t<t_2$$
....
$$N(t)=x \;\; ; \;\; t_x<t<t_{x+1}$$

عملية التعداد $\{N(t):t\geq 0\}$ تدعى بعملية بواسون بكثافة $\lambda>0$ (متوسط تدفق الأحداث) ولها الخصائص الأتية:

– مسارات ثابتة بالقطع مع وثبات (jumps) بحجم واحد فقط.

- المسارات هي (مستمرة على اليمين ، مع نهاية على اليسار) **(càdlàg)**[1].

الشكل (12-8): العملية البواسونية



تعريف:

نقول عن أي عملية أنها **بواسونية** اذا كانت تحقق الفرضيات الأتية :

12-8-1- فرضيات العملية البواسونية

ف1) العملية بدون ذاكرة (بدون عاقبة): وقوع قبل اللحظة t ليس له تأثير بوقوع أحداث خلال الفترة $(t \, , \, t+h)$.

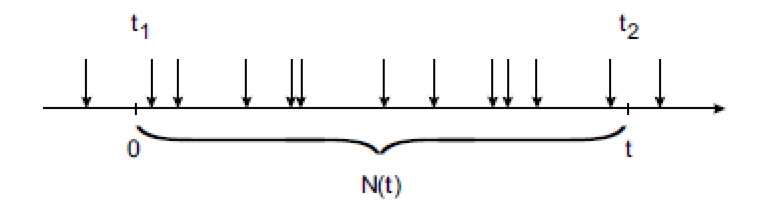
[1] اختصار بالفرنسية (continue à droite, limite à gauche) ، هي دالة معرفة على مجموعة E لأعداد حقيقية حيث أنها مستمرة على اليمين عند كل نقطة من E وتقبل نهاية على اليسار عند كل نقطة من E ، هذه الدوال مهمة في دراسة العمليات التصادفية وهي بالأخص عمليات بوثبات، مجموعة دوال (càdlàg) تدعى أيضا بفضاء سكوروخود Skorokhod space ، ومن أمثلة هذه الدوال نجد: الدوال المستمرة، التوابع التوزيعية ، مسارات ليفي ، كلها مسارات (càdlàg).

ف2) الرسوخ: قانون التزايد $\left[N(t\ ,\ t+h)-N(t)\right]$ للعملية لا يعتمد على h وهو دالة ل x و t فقط (هي عملية بتزايدات مستقلة).

قانون عدد الأحداث المتدفقة $N(t)$:

نعتمد الترميز الاتي: $p(x,t)=p\{N(t)=x\}$ ، لنهتم بتوزيع $p(x,t)$ خلال مجال زمني منتهي t لتدفق بسيط للحوادث ، نوضح ذلك في الشكل (12-9):

الشكل (12-9): الأحداث المتدفقة



رياضيا توصف هذه العملية بعملية التعداد $N(t)$ ، ومن الشكل السابق نخلص الى ما يلي:

- $N(t)$: عدد تدفق للأحداث خلال المجال الزمني $(0,t)$.
- $N(t_1,t_2)$: عدد تدفق للأحداث خلال المجال الزمني (t_1,t_2).

نفترض أننا نود نمذجة تدفق أحداث عشوائية بمتوسط λ ، سنجزئ نصف مستقيم $[0\ ,\infty[$ الى مجالات صغيرة بطول δ والموضحة في الشكل (12-10)

الشكل (12-10): نمذجة تدفق أحداث عشوائية بمتوسط λ

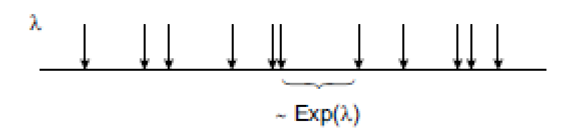
$0 \quad \delta \quad 2\delta \quad 3\delta \quad 4\delta \quad 5\delta \quad 6\delta \quad 7\delta \quad 8\delta \quad 9\delta \quad 10\delta \quad \cdots \quad t$

$N(t)$ عدد الحوادث المتدفقة في مجال زمني $[0,t]$ ، لدينا $x \approx \frac{t}{\delta}$ (هنا استخدمنا x عدد تدفق للأحداث بدل n)، نستنتج أن $N(t) \to B_i(x,p)$ مع $p = \lambda\delta$ ، فالمتوسط يكون كما يلي:

$$xp = x\lambda\delta = \frac{t}{\delta}\lambda\delta = \lambda t$$

كذلك يجب أن ننوه بأن عدد الحوادث المتدفقة بين اللحظات الزمنية (Int) مستقلة وتخضع للتوزيع الأسي($Exp(\lambda)$) حيث: $p(Int > t) = e^{-\lambda t}$ ونوضح ذلك في الشكل (11−12)

الشكل (12−11): عدد الحوادث المتدفقة بين اللحظات الزمنية (Int)



نعتبر مجال صغير جدا بطول Δt ، فعدد تدفق الأحداث خلال هذا المجال الزمني له نفس التوزيع ل $N(\Delta t)$ ، نلخص وقوع الحوادث فيما يلي:

عدم وقوع حدث في طول المجال Δt هو كما يلي:

دستور تايلور $$p\{N(\Delta t)=0\} = e^{-\lambda\Delta t} = 1-\lambda\Delta t + \frac{\lambda^2}{2}(\Delta t)^2 - ...$$

اذا كان Δt صغيرا فأن $p\{N(\Delta t)=0\} = 1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ ، (o) يمثل رمز لاندو Landau.

$o(\Delta t)$ يبين أن الدالة مهملة بالمقارنة مع Δt ، أكثر دقة نضع $g(\Delta t)=o(\Delta t)$ يعني هذا أن $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(\Delta t)}{\Delta t}=0$، أما الأن نقوم بحساب وقوع حدث في طول المجال Δt وهو كما يلي:

$$\begin{aligned}
p\{N(\Delta t)=1\} &= \lambda\Delta t\ e^{-\lambda\Delta t} \\
&= \lambda\Delta t\left(1-\lambda\Delta t+\frac{\lambda^2}{2}(\Delta t)^2-\dots\right) \\
&= \lambda\Delta t+\left(-\lambda^2(\Delta t)^2+\frac{\lambda^3}{2}(\Delta t)^3-\dots\right) \\
&= \lambda\Delta t+o(\Delta t)
\end{aligned}$$

اذا كان Δt صغيرا فأن $p\{N(\Delta t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

بشكل مماثل بالنسبة ل: $p\{N(\Delta t)\geq 2\}=o(\Delta t)$

هناك بعض النتائج نلخصها فيما يلي:

نتائج:

1. اذا كان طول المجال صغير جدا فأن وقوع الحوادث في المجال هو كما يلي:

وقوع حدث في المجال $]t\ ,\ t+\Delta t[$ هو:

$p(]t\ ,\ t+\Delta t])=(\lambda\Delta t+o(\Delta t))$.

وقوع حدثين في المجال $]t\ ,\ t+\Delta t[$ هو: $p(]t\ ,\ t+\Delta t])=o(\Delta t)$.

عدم وقوع حدث في المجال $]t\ ,\ t+\Delta t[$ هو:

$p(]t\ ,\ t+\Delta t])=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

2. احتمال وقوع أي حدث يتعلق بطول المجال حيث نرمز له ب $p(x,t)$ لاحتمال وقوع عدد x من حوادث التدفق المفروض خلال أي مجال زمني t ، حيث $(x=0,1,2,...)$.

عدد التدفقات في مجال زمني بطول $t \geq 0$ يتبع قانون بواسون بالوسيط λt يعني يجب اثبات القانون الاحتمالي X التالي: $f(x)=\dfrac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad ; \quad x=0,1,2,...$

سنقوم بإيجاد أولا: $p(0,t)$

$p(0\ ,\ t+\Delta t)$ احتمال عدم وقوع أي حادث خلال المجال $[0\ ,\ t+\Delta t]$.

عدم وقوع أي حادث خلال المجال $[0\ ,\ t+\Delta t]$ ، يعني عدم وقوع أي حادث خلال المجال $[0\ ,\ t]$ و عدم وقوع أي حادث خلال المجال $]t\ ,\ t+\Delta t]$، من خلال الاستقلالية نجد $p(0\ ,\ t+\Delta t)=p(0,t)\,p(]t\ ,\ t+\Delta t])$.

اذا كانت Δt صغيرة جدا فأن $p(]t\ ,\ t+\Delta t])=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ لأن وقوع الحادث أكثر من مرة في المجال هو $0(\Delta t)$.

فأنه يصبح لدينا:

$$p(0\ ,\ t+\Delta t)=p(0,t)-p(0,t)\big(\lambda\Delta t+o(\Delta t)\big)$$
$$\frac{p(0\ ,\ t+\Delta t)-p(0,t)}{\Delta t}=-\lambda\,p(0,t)+o(1)$$

بالانتقال عبر النهاية بالنسبة ل $(\Delta t \to 0)$ تصبح لدينا العلاقة الأتية:

$$\frac{d}{dt}\,p(0,t)=-\lambda\,p(0,t)$$

العلاقة الأخيرة عبارة عن معادلة تفاضلية خطية (لحلها يتم استخدام طريقة فصل المتغيرات)، عند الشرط الابتدائي $p(0,0)=1$ الذي نتج من العلاقة $\left(p\left(]0\ ,\ t+dt]\right)=1-\lambda dt+o(dt)\right)$، في الأخير احتمال عدم وقوع أي حادث خلال المجال الزمني t : $p(0,t)=e^{-\lambda t}$.

ثانيا: $p(x,t)$ ، سنقوم بحسابها من أجل $(x>0)$

$p(x\ ,\ t+\Delta t)$ هو احتمال وقوع الحادث x في المجال $[0\ ,\ t+\Delta t]$، يعني وقوع $(x-k)$ حادث خلال المجال $[0\ ,\ t]$ و وقوع k حادث خلال المجال $]t\ ,\ t+\Delta t]$، مع $0\le k\le x$.

وفقا للاستقلالية نحصل على: $\sum_{k=0}^{x} p(x-k\ ,\ t)p\left(k\ ,\ ]t\ ,\ t+\Delta t]\right)$

بالرجوع الى الملاحظات السابقة:

$$p(x\ ,\ t+\Delta t)=p(x,t)\left(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)+p(x-1,t)\left(\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)+\sum_{k=2}^{x} p(x-k\ ,\ t)o(\Delta t)$$

$$\frac{p(x\ ,\ t+\Delta t)-p(x,t)}{\Delta t}=-\lambda p(x,t)+\lambda p(x-1,t)+\frac{o(\Delta t)}{(\Delta t)}\left(p(x,t)+p(x-1,t)+\sum_{k=2}^{x} p(x-k\ ,\ t)\right)$$

بالانتقال عبر النهاية بالنسبة ل $(\Delta t\to 0)$ تصبح لدينا العلاقة الأتية:

$$\frac{d}{dt}p(x,t)=-\lambda p(x,t)+\lambda p(x-1,t).$$

سبق وقد أثبتنا أن $p(0,t)=e^{-\lambda t}$ ولدينا الشرط الابتدائي $p(x,0)=0$ لأجل $x\ge 1$.

سنقوم بعملية استقراء من خلال اختيار $p(1,t)$:

$\frac{d}{dt}p(1,t)=-\lambda p(1,t)+\lambda p(0,t)$ مع $p(1,0)=0$.

$\frac{d}{dt}p(1,t)=-\lambda p(1,t)+\lambda e^{-\lambda t}$ مع $p(1,0)=0$.

حل هذه المعادلة التفاضلية (يتم وفق طريقة تغيير الثابت) فنجد: $p(1,t)=\lambda t e^{-\lambda t}$ ،

ونستمر بشكل مماثل بالنسبة ل:

$$p(2,t)=\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!}$$
$$p(3,t)=\frac{(\lambda t)^3 e^{-\lambda t}}{3!}$$

حتى نصل الى الصيغة المطلوبة وهي: $f(x)=\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad ; \quad x=0,1,2,...$

12-8-2- قوانين الوصول، قوانين الخدمة المستخدمة في نظرية الانتظار:

لنعد إلى أبسط ظاهرة انتظار حيث لا يوجد سوى صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد، فالحالة المثيرة للاهتمام هي الجمع بين ظاهرتين عشوائيتين ، بحيث يصل الزبائن بشكل عشوائي ويكون الزمن الذي يقضيه كل زبون في مركز الخدمة عشوائي، على سبيل المثال ، زبائن بنك معين يصلون عشوائيا إلى شباك خدمة البنك (هذا يعني: وقت وصول الجميع عشوائي) ، يبقون هناك لفترة زمنية متغيرة لا يمكن التنبؤ بها لكل منهم (لا يزال متغيرا عشوائيا).

هل يمكننا إحصائيا تحديد الطريقة التي يصل بها الزبائن إلى البنك ومدة وقوف أمام الشباك أثناء الخدمة الخاصة بهم؟

تظهر التجربة في ظواهر كثيرة الانتظار أن قوانين الوصول تتبع القانون البواسوني وقوانين تقديم الخدمات تتبع القانون الأسي.

من الواضح أن هذه ليست الأشكال الوحيدة التي يمكن أن تؤثر عليها هذه القوانين، لكنها الأكثر شيوعًا والأبسط أيضا في الاستخدام للحصول على عرض سهل للمبادئ والنظرية.

أولا: ظواهر الانتظار:

الغرض من ترميز Kendall هو وصف الظاهرة بطريقة دقيقة، خصائص النظام مع التوقع، من خلال ربطه بسلسلة أحرف على النحو التالي: $A/B/S/N$ ، حيث:

A : قانون الوصول ، A=M (قانون بواسون ، M تعني هنا الماركوفي) ، بالنسبة للوصول الحتمي ، أي أن المجالات ثابتة A=D لدينا ، A=G بالنسبة لقانون عام كيفي.

B : رمز الخدمة، B=M ، تتبع القانون الأسي، B=D (مدة الخدمة ثابتة) ، B=G (بالنسبة لقانون عام كيفي).

هناك قوانين أخرى نستخدمها في بعض المرات خلاف توزيعي بواسون والأسي مثل توزيع إيرلانغ (تعميم لتوزيع بواسون وأقل تشتت منه).

S: عدد مراكز الخدمة، في حالة عدم وجود الدقة نعتبر جميع المراكز متكافئة لها نفس معدل الخدمة.

N: السعة أي الحد الأقصى لعدد الزبائن المؤهلين لدخول النظام (الطابور ومركز الخدمة)، إذا تم حذفه فيعني أن النظام له سعة لانهائية.

ثانيا: مجاميع بعض السلاسل :

$$0 < q < 1$$

$$\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q} \text{.........................} (1)$$

$$\sum_{n\geq 0} nq^n = \frac{1}{(1-q)^2} \text{.................} (2)$$

$$\sum_{n\geq 0} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3} \text{.................} (3)$$

$$\sum_{x=1}^{n} 1 = n \text{.........................} (4)$$

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2} \text{..............} (5)$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{..............} (6)$$

$$\sum_{x=0}^{n} x^k = \frac{(1-x^{n+1})}{1-x}, \text{x} \neq 1 \text{..............} (7)$$

$$\sum_{x=0}^{n} kx^k = \frac{x\left[1-(n+1)x^n + nx^{n+1}\right]}{(1-x)^2}, \text{x} \neq 1 \text{..............} (8)$$

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} \text{...........} (9)$$

ثالثا: نموذج (M/M/1) : نظام ($\infty / FIFO$):

هذا نموذج صف انتظار يكون الوصول فيه ماركوفي (Marcovian) ويكون توزيع المغادرة أيضا ماركوفي ، وعدد مراكز الخدمة واحد وحجم طابور الانتظار أيضا ماركوفي، مركز الخدمة الوحيد وحجم الصف لانهائي ونوع تقديم الخدمة هو من يأتي أولا تقدم له الخدمة أولاً (FCFS) .

رابعا: فرضيات النموذج:

1) n = عدد الزبائن في النظام.

2) μ = متوسط معدل الخدمة.

3) λ = متوسط معدل الوصول.

4) $P_n(t)$ = احتمال عدد n من الزبائن في النظام في الزمن t.

5) احتمال وصول شخص واحد إلى النظام خلال $dt = \lambda dt + o(h)$.

6) احتمال وصول أكثر من شخص إلى النظام خلال $dt = o(h)$.

7) احتمال عدم وصول أي شخص إلى النظام أثناء $dt = 1 - \lambda dt + o(h)$.

8) احتمال تقديم زبون واحد للخدمة في الزمن المناسب $dt = \mu dt + o(h)$.

9) احتمال تقديم أكثر من عميل للخدمة في الزمن المناسب $dt = o(h)$.

10) احتمال عدم تقديم الخدمة لزبون واحد في الزمن المناسب $dt = 1 - \mu dt + o(h)$.

ليكن $P_n(t+dt)$ هو احتمال n من الزبائن في النظام في الزمن $(t+dt)$.

فالنظام **M/M/1** يعني أن هناك شباك واحد فقط، λ هو متوسط عدد الوافدين للنظام بينما μ هو متوسط عدد الزبائن الذين تم التعامل معهم لكل وحدة زمنية(معدل الخدمة لكل مركز)، نفترض أيضا أن $\lambda < \mu$ خلاف ذلك يصبح صف الانتظار لانهائي، نسمي $p_n(t)$ إلى احتمال احتواء صف الانتظار على عدد n من الأشخاص، ما هو هذا الاحتمال في اللحظة $t+dt$.

نعتبر أنه خلال المدة $t+dt$ يمكن إضافة شخص واحد على الأكثر إلى صف الانتظار ويمكن معالجة شخص واحد على الأكثر بواسطة الصراف (يمكن أن يكون موظف أو ألة،...)، خلال المدة dt هناك أربع حالات ممكنة:

- يمكن لأي شخص أن يصل دون أن يغادر أحد شباك الخدمة.
- يمكن لأي شخص المغادرة من الشباك دون أن يصل أي شخص أخر.

- يمكن لشخص واحد أن يصل وأخر يغادر من الشباك.
- لا أحد يصل ولا أحد يغادر من الشباك.

هذه الحالات تسمح لنا بكتابة العلاقة التالية:

في اللحظة t لدينا (n−1) زبون يصل إلى مركز الخدمة خلال dt، لكن ليس هناك أي خدمة مقدمة في هذه الفترة ، إذن في $(t+dt)$ الاحتمال المقابل يعطى كما يلي:

$$P_{n-1}(t)\left[\lambda dt(1-\mu dt)\right]$$

في اللحظة t لدينا n زبون في النظام ، خلال الفترة dt لا يوجد أي داخل ولا أي شخص قُدمت له الخدمة، الاحتمال المرافق يكون على النحو الاتي:

$$P_n(t)(1-\mu dt)(1-\lambda dt)$$

في اللحظة t لدينا (n+1) زبون في النظام ، هناك خدمة داخل خلال هذه اللحظة ، إذن في $(t+dt)$ الاحتمال المقابل يعطى كما يلي: $P_{n+1}(t)(1-\lambda dt)\mu dt$

نهمل الحدود من الدرجة الثانية $(dt)^2$:

$$P_n(t+dt)=P_{n-1}(t)\lambda dt+P_{n+1}(t)\mu dt+P_n(t)(\mu dt\lambda dt)$$
$$+P_n(t)(1-\mu dt)(1-\lambda dt)$$

$$P_n(t+dt)=P_{n-1}(t)\lambda dt+P_{n+1}(t)\mu dt+P_n(t)(1-\mu dt-\lambda dt)$$
$$\Leftrightarrow P_n'(t)=\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)-(\mu+\lambda)P_n(t).....(2)$$

هذه العلاقة صحيحة فقط عندما تكون $n>0$، عندما تكون $n=0$ لا يمكن للشباك معالجة أي شخص موجود بالفعل، لذلك لدينا:

$$P_0'(t)=\frac{P_0(t+dt)-P_0(t)}{dt}=\mu P_1(t)-\lambda P_0(t).....(3)$$

نفرض أن الظاهرة باقية على نفس الحالة (راسخة، ثابتة)، احتمالات الحالات التي وصلت إلى حد النهاية: ثابتة $= P_n(t) = P_n^*$ ، إذن :

$P_0'(t) = P_1'(t) = ... = P_n'(t) = ... = 0$.

المعادلات التفاضلية (2) و (3) ستتحول إلى معادلات جبرية:

$$\begin{cases} \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\mu + \lambda) P_n = 0 \\ \mu P_1 - \lambda P_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu P_{n+1} = (\mu + \lambda) P_n - \lambda P_{n-1} \\ \mu P_1 = \lambda P_0 \end{cases}$$

من خلال الاستقراء نتحقق مما يلي:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

P_n : احتمال وجود n وحدة في النظام.

يبقى تحديد P_0 (متوسط الزمن الذي يظل فيه النظام خاملا (احتمال عدم وجود أي وحدة في النظام)) مع العلم أن $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ ،

$$\therefore P_0 + P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + ...$$

$$\therefore P_0\left[1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + ...\right] ....(4)$$

نتذكر مجموع حدود متتالية هندسية لانهائية شرط

$|q| < 1$; $1 + q + q^2 + ... + q^m \to \frac{1}{1-q}$ ،

عندما يكون $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| < 1$ فأن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

$$\therefore 1 = P_0 \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\therefore P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

خامسا: دراسة المعلمات المميزة للنظام:

نرمز لمتوسط عدد الزبائن داخل النظام بـ L و يحسب كما يلي:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$\therefore L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots\ldots + n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} + \ldots\right] \ldots\ldots(5)$$

نلاحظ أن العبارة التي بين العارضتين هي عبارة عن مشتق العبارة التالية:

$$B = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \ldots\ldots$$

العبارة B يمكن كتابتها كما يلي:

$$B = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

إذن :

$$B' = \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} ....(6)$$

نعوض (6) في (5) فيصبح:

$$L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} ....(7)$$

سادسا: قانون ليتل Little's Law[1] :

قانون ليتل هو نظرية تحدد متوسط عدد الوحدات(الزبائن) في نظام صف الانتظار ثابت، بناء على متوسط زمن الانتظار لوحدة ما داخل النظام ومتوسط عدد الوحدات التي تصل إلى النظام لكل وحدة زمنية.

يوفر القانون نهجا بسيطا وبديهيا لتقييم كفاءة أنظمة الطابور، هذا المفهوم مهم للغاية للعمليات التجارية لأنه ينص على أن عدد الوحدات في نظام صف الانتظار يعتمد بشكل أساسي على متغيرين رئيسيين ولا يتأثر بعوامل أخرى، مثل توزيع الخدمة أو طلب الخدمة.

[1] - **جون ليتل (1928 -) John Little** ، رياضياتي أمريكي.

$$L = \lambda \cdot W$$
$$L_q = \lambda \cdot W_q$$
$$L_s = \lambda \cdot W_s$$

حيث:

L: متوسط عدد الوحدات في النظام.

λ : متوسط عدد الوحدات التي تصل إلى النظام لكل وحدة زمنية.

W : متوسط زمن الانتظار الذي تقضيه الوحدة في النظام.

W_q: متوسط الزمن الذي تستغرقه الوحدة في صف الانتظار.

ينطبق الأول مما سبق على النظام والثاني على صف الانتظار وهو جزء من النظام، هناك علاقة مفيدة أخرى في صف الانتظار هي:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

L_s: متوسط عدد الزبائن أثناء الخدمة

W_s: متوسط الزمن الذي تستغرقه الوحدة في صف الانتظار

حيث: $L = L_s + L_q$

مثال7:

إذا كان سداد أحد المتاجر يستوعب زبون واحد فقط، بحيث كان توزيع وصول الزبائن إلى هذا المتجر يتبع توزيع بواسون بمتوسط زبونين في الدقيقة، ومتوسط زمن المكوث عند الكاشير (أمين الصندوق) يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 3 زبائن في الدقيقة،

نموذج الخدمة يتبع الذي يصل أولا يخدم أولا مع عدد كبير جدا (غير محدود تقريبا) من المشترين.

نود الحصول على خصائص التشغيل لنظام صف الانتظار لهذا المتجر.

حل المثال7:

1- معامل الاستخدام (متوسط الفترة التي يكون فيها النظام مشغولا):

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$.

2- احتمال عدم وجود أي وحدة في النظام (متوسط الخمول): $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}$.

3- احتمال وجود 4 زبائن في النظام مثلا: $P_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.0658$.

4- متوسط عدد الزبائن الموجود في النظام: $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = 2$.

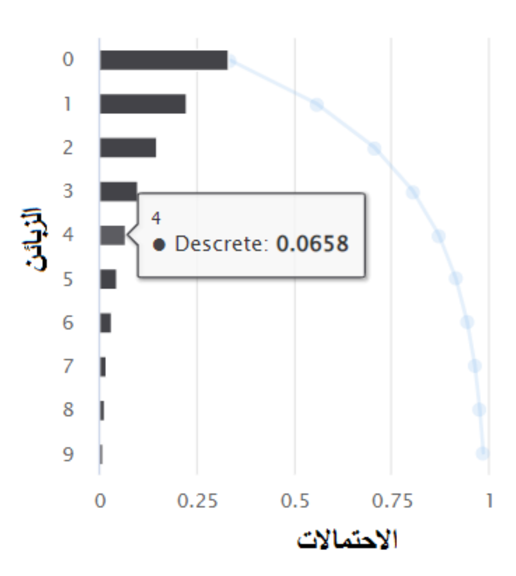
5- متوسط الزمن الذي يستغرقه الزبون في النظام: $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{2} = 1\min$.

6- متوسط الزمن الذي يستغرقه الزبون في صف الانتظار:

$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\min$.

7- متوسط عدد الزبائن الموجود في صف الانتظار: $L_q = \lambda \cdot W_q = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

تمثيل احتمالات وجود زبائن في النظام في الشكل التالي:



ملاحظة: تم رسم المخطط البياني بواسطة الخوارزمية الجاهزة

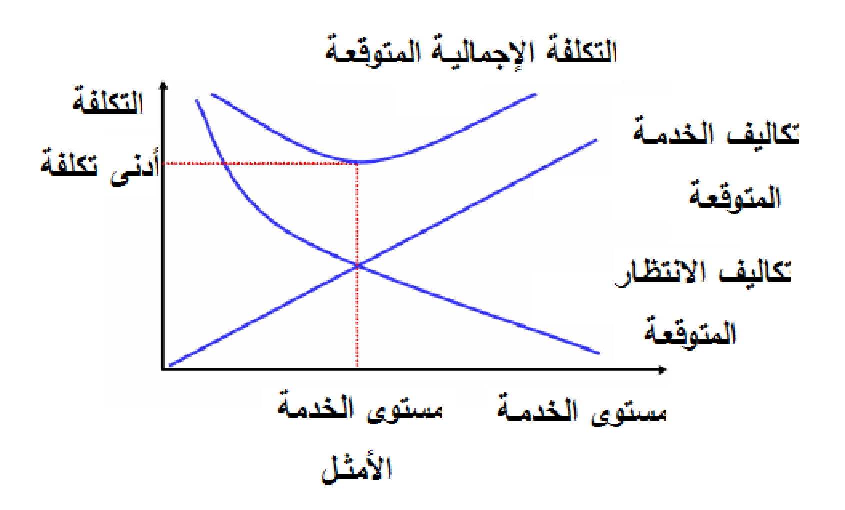
https://www.supositorio.com/rcalc/rcalclite.htm

12-9- تكاليف الطابور (الصف) Queuing Costs :

من الأحسن على مديري العمليات دراسة المفاضلة التي تحدث بين تكلفتين: تكلفة تقديم خدمة جيدة وتكلفة وقت انتظار الزبون ، بحيث يريد المديرون صفوف انتظار قصيرة بما يكفي حتى لا يصبح الزبائن غير سعداء ويغادرون بدون شراء ، ومع ذلك قد يكون المديرون على استعداد للسماح لبعض الانتظار إذا كان متوازنا من خلال توفير جزء من تكاليف الخدمة.

التكلفة الإجمالية المتوقعة هي مجموع **تكاليف الخدمة المتوقعة** بالإضافة إلى **تكاليف الانتظار** المتوقعة أنظر الشكل 12-12).

الشكل (12-12): تكاليف الطابور



تكلفة الانتظار في الطوابير تتناقص مع تحسن مستوى الخدمة (الشكل 12-12)، قد تعكس تكلفة الانتظار الإنتاجية المفقودة للعمال، بينما تنتظر الأدوات أو الآلات الإصلاحات أو قد تكون ببساطة تقديرا لتكلفة الزبائن المفقودين بسبب سوء الخدمة وطول صفوف الانتظار، كما نلاحظ من الشكل تزداد تكاليف الخدمة عندما تحاول المؤسسة رفع مستوى خدمتها، يمكن للمديرين في بعض مراكز الخدمة تغيير السعة من خلال وجود موظفين احتياطيين وآلات يمكنهم تعيينها لمحطات خدمة معينة لمنع أو تقصير الصفوف الطويلة بشكل مفرط، في متاجر البقالة على سبيل المثال يمكن للمديرين وموظفي الأوراق المالية فتح عدادات سداد إضافية، في البنوك ونقاط تسجيل الوصول بالمطار ، قد يتم استدعاء العاملين بدوام جزئي للمساعدة، مع تحسن مستوى الخدمة (أي التسريع) ، فإن تكلفة الاجمالية تتناقص إلى حد معين ، بعدها تبدأ بالارتفاع رويدا رويدا.

مثال8:

يهتم مالك المتجر بعوامل التكلفة بالإضافة إلى معلمات صف الانتظار المحسوبة في المثال(7)، تقدر تكلفة زمن انتظار الزبائن من حيث عدم الرضى وفقدان النية الحسنة 12 دج لكل دقيقة يقضيها في الانتظار ، يتقاضى الكاشير 4000 دج في اليوم (10 ساعات عمل).

المطلوب:

حساب متوسط زمن انتظار الزبون اليومي، ثم التكلفة الاجمالية المتوقعة.

حل المثال8:

$$W_q = \frac{2}{3} \ , \ \left(\frac{2}{3} \times 2 \times 10 \times 60 = 800 \min \right)$$

تكلفة زمن انتظار الزبائن: 12 × 800 = 9600 دج.

التكلفة الرئيسية الوحيدة التي يمكن لمالك المتجر تحديدها في حالة الانتظار هو راتب الكاشير (4000 دج) ، إذن التكلفة الاجمالية المتوقعة هي:

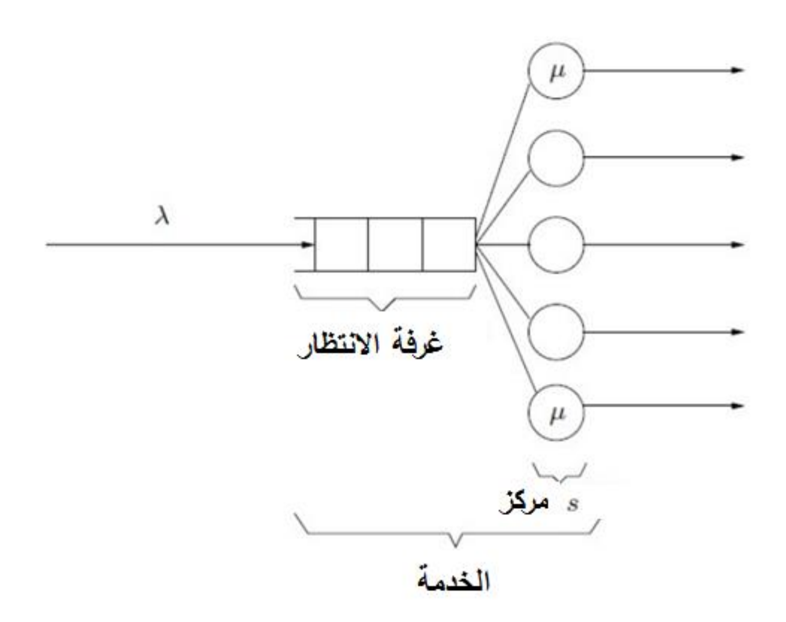
9600 + 4000 = 13600 دج.

12-9-1- نموذج (M/M/S) :

لا يلتزم الزبون الذي يدخل النظام بالمرور على جميع مراكز الخدمة S (حالة نموذج السلسلة)، إذا كان لكل مركز صف انتظار، فالزبون في وقت وصوله يختار واحدا منها ، بالطبع يجب أن يختار أقصر صف، أو ينضم إلى صف انتظار إذا كان فريدًا،

فسيتم اختياره من صف الانتظار هذه وفقا للسياسة المعتمدة في النظام، نوضح ذلك في الشكل التالي:

الشكل (12–13): نموذج (M/M/S)



مادام أن n هو عدد الزبائن الموجودين في النظام أقل من S فأنه يدل على أن مراكز الخدمة ليست كلها مشغولة ، فلا يتشكل صف الانتظار ويتم الاهتمام بأي زبون قادم على الفور بواسطة أحد المراكز غير المشغولة، بمجرد أن n = S يبدأ صف الانتظار في التكوين وأي زبون يصل يجب أن ينضم إلى صف الانتظار.

12–9–2– دراسة احتمالات الحالة:

للتعامل مع هذا النوع من صفوف الانتظار يمكننا أن نعتمد على نتائج عمليات الفناء والتكاثر، نلاحظ في هذه الحالة $\forall n \, , \, \lambda_n = \lambda$ ، لأن عدد الوافدين لا يعتمد على عدد الزبائن الموجودين في النظام ، من ناحية أخرى $\mu_n = n\mu$ من أجل $1 \le n < S$ و

$\mu_n = S\mu$ لكل $n \geq S$ لأنه إذا كان μ هو متوسط عدد الزبائن الذين يتم خدمتهم خلال وحدة زمنية بواسطة مركز خدمة واحد ، و 2μ إذا كان هناك مركزان ، و 3μ إذا كان لدينا 3 مراكز....، وهكذا.

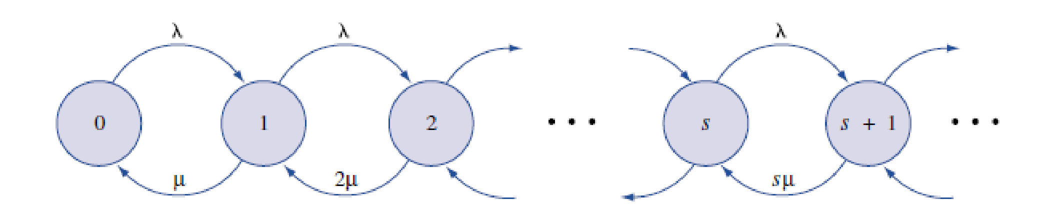
جملة المعادلات لاحتمالات الحالات تكون بنفس الخطوات السابقة (حالة مركز واحد):

$$\begin{cases} P_0(t+dt) = P_0(t)(1-\lambda dt) + P_1(t)\mu dt \\ P_n(t+dt) = P_{n-1}(t)\lambda dt + \left[1-(\lambda+n\mu)dt\right]P_n(t) + (n+1)P_{n+1}(t)\mu dt \\ \qquad 1 \leq n < S \\ P_n(t+dt) = P_{n-1}(t)\lambda dt + \left[1-(\lambda+S\mu)dt\right]P_n(t) + P_{n+1}(t)S\mu dt \\ \qquad \forall n \geq S \end{cases}$$

جملة المعادلات التفاضلية تكون كما يلي:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+n\mu)P_n(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) \\ \qquad 1 \leq n < S \\ P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+S\mu)P_n(t) + S\mu P_{n+1}(t) \\ \qquad \forall n \geq S \end{cases}$$

نلاحظ أن جملة المعادلات التفاضلية السابقة يمكن استنتاجها من الرسم البياني عملية ماركوف المبسطة، وفق ما يلي:



نفرض أن الظاهرة باقية على نفس الحالة (ثابتة)، احتمالات الحالات التي وصلت إلى حد النهاية: ثابتة $= P_n(t) = P_n^*$ ، إذن : $P_0'(t) = P_1'(t) = ... = P_n'(t) = ... = 0$.

جملة المعادلات التفاضلية السابقة تتحول إلى معادلات جبرية:

$$\begin{cases} \mu P_1 - \lambda P_0 = 0 \\ \lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu) P_n + \mu(n+1) P_{n+1} = 0 \;\; ; \;\; 1 \le n < S \\ \lambda P_{n-1} - (\lambda + S\mu) P_n + S\mu P_{n+1} \;\; ; \;\; n \ge S \end{cases}$$

بالطبع، شرط عدم انسداد النظام هو $\frac{\lambda}{\mu S} < 1$ ، من الشكل البياني نلاحظ:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \;\; , \;\; \lambda P_1 = 2\mu P_2 \;\; ,......, \;\; \lambda P_{S-1} = S\mu P_S \;\; ,.....$$

من خلال الاستقراء نتحقق مما يلي:

$$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 \;\; , \;\; P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \;\; , \;\; P_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 \;\; , ...$$

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

في حالة $n=S$ يكون $P_S=\frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S P_0$ ، من ناحية أخرى إذا كان S زبون حاضر نحصل على: $\lambda P_{S+k}=S\mu P_{S+k+1}$، إذن نحصل على العبارة P_{S+1} بواسطة k=0:

$P_{S+1}=\left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)P_0$.

إذن : $P_{S+1}=\frac{1}{SS!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{S+1}P_0$، ثم خطوة بخطوة بالنسبة لـ

$$P_n=\frac{1}{S^{n-S}S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 : n\geq S$$

في الواقع يمكن الحصول على هذه العبارات بسرعة من خلال تطبيق علاقة عمليات الفناء والتكاثر، نظرا لأن المجموع غير محدود لـ P_n مع $\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$، دون أن ننسى معامل الاستخدام يساوي $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$،

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}P_n=P_0\left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!}+\sum_{n\geq s}^{\infty}\frac{\rho^n}{S!S^{n-S}}\right)=1$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}P_n=P_0\left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^s}{S!}\sum_{n\geq s}^{\infty}\frac{\rho^{n-s}}{S^{n-S}}\right)=1$$

شرط عدم انسداد النظام هو $\frac{\rho}{S}<1$، نطبق العلاقة (1) من مجاميع بعض السلاسل.

بالنسبة $\frac{\rho^s}{S!}\sum_{n\geq s}^{\infty}\frac{\rho^{n-s}}{S^{n-S}}$ حساب المجموع يكون على النحو الاتي:

نجري تبديل للمتغير بوضع $y=n-s$ فينتج لنا:

$$\sum_{y\geq 0}^{\infty}\frac{\rho^y}{S^y}=\sum_{y\geq 0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{S}\right)^y\rightarrow\frac{1}{1-(\rho/S)}=\frac{S}{S-\rho}$$

$$\frac{\rho^s}{S!}\sum_{n\geq s}^{\infty}\frac{\rho^{n-s}}{S^{n-S}}=\frac{\rho^s}{S!}\cdot\frac{S}{S-\rho}=\frac{\rho^s}{(S-1)!(S-\rho)}$$

إذن : $$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(S-1)!(S-\rho)}\right]}$$

يمكن إعادة الكتابة للتوضيح:

$$\begin{cases} P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(S-1)!(S-\rho)}\right]} & \text{................}(1) \\ P_n = \frac{\rho^n}{n!}P_0 \quad ; \quad n < S & \text{..............}(2) \\ P_n = \frac{\rho^n}{S^{n-S}S!}P_0 \quad ; \quad n \geq S & \text{...........}(3) \end{cases}$$

إذا كان $\rho \geq 1$ لا توجد حالة مستقرة، بمعنى أخر إذا كان معدل الوصول كبيرا على الأقل مثل أقصى معدل خدمة ممكن $(\lambda \geq S\mu)$فالنظام يحدث له " **انفجار**"، من خلال (3) يمكن إظهار أن احتمالية الحالة مستقرة لأن جميع مراكز الخدمة مشغولة .

12-9-3- دراسة المعلمات المميزة للنظام:

أولا: الوحدات المتوقعة في مركز الخدمة L_s :

سنتطرق إلى العلاقات الخاصة بالعدد المتوقع من الوافدين A، والعدد المتوقع لحالات المغادرة D في فترة زمنية محددة T:

$$E(A \text{ in } T) = \lambda T[P_0 + P_1 + ...] = \lambda T$$
$$E(D \text{ in } T) = \mu T[P_0 + 2P_1 + ... + s\,P_s + ...] = \mu T L_s$$

نلاحظ أن العبارة الأخيرة مرتبطة بـ L_s ، فرضا أنه لدينا حالة توازن أي:

$$E(A\ in\ T) = E(D\ in\ T)$$

وبالتالي: $\lambda = \mu L_s \quad ; \quad L_s = \rho$

ثانيا: الوحدات المتوقعة في صف الانتظار L_q:

يتم الحصول على العدد المتوقع للوحدات في صف الانتظار باستخدام العلاقات (1 و 2) من مجاميع بعض السلاسل.

ويكون الحساب على النحو الاتي:

$$L_q = \sum_{n\geq s}^{\infty}(n-s)P_n = \sum_{n\geq s}^{\infty}(n-s)\frac{\rho^n}{S!S^{n-S}}P_0$$

$$\therefore L_q = P_0\frac{\rho^s}{S!}\sum_{n\geq s}^{\infty}(n-s)\frac{\rho^{n-s}}{S^{n-S}}$$

نجري تبديل للمتغير بوضع $y = n - s$ فينتج لنا:

$$L_q = P_0\frac{\rho^s}{S!}\sum_{n\geq s}^{\infty}y\left(\frac{\rho}{S}\right)^y$$

$$\therefore L_q = P_0\frac{\rho^s}{S!}\cdot\frac{\rho/S}{(1-\rho/S)^2} = P_0\frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}$$

متوسط عدد الزبائن داخل النظام بـ L و يحسب كما يلي:

$$L = L_s + L_q$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}P_0$$

مثال9:

نفس بيانات المثال السابق، إذا قرر صاحب المتجر إضافة سداد ثاني بحيث يتم تقديم الخدمة لزبونين معا، يريد صاحب المتجر مقارنة فعالية هذا النظام مع نظام الانتظار القديم (ذو مركز خدمة واحد)؟

حل المثال9:

1- معامل الاستخدام (متوسط الفترة التي يكون فيها النظام مشغولا):

$$\frac{\lambda}{\mu S}=\frac{2}{3\times 2}=0.333$$

2- احتمال عدم وجود أي وحدة في النظام (متوسط الخمول):

$$P_0=\frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^s}{(S-1)!(S-\rho)}\right]}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{(2/3)^2}{1\cdot(2-2/3)}}=\frac{1}{2}$$

3- متوسط عدد الزبائن الموجود في صف الانتظار:

$$L_q=P_0\frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2/3)^3}{1\cdot(4/3)^2}=\frac{1}{12}$$

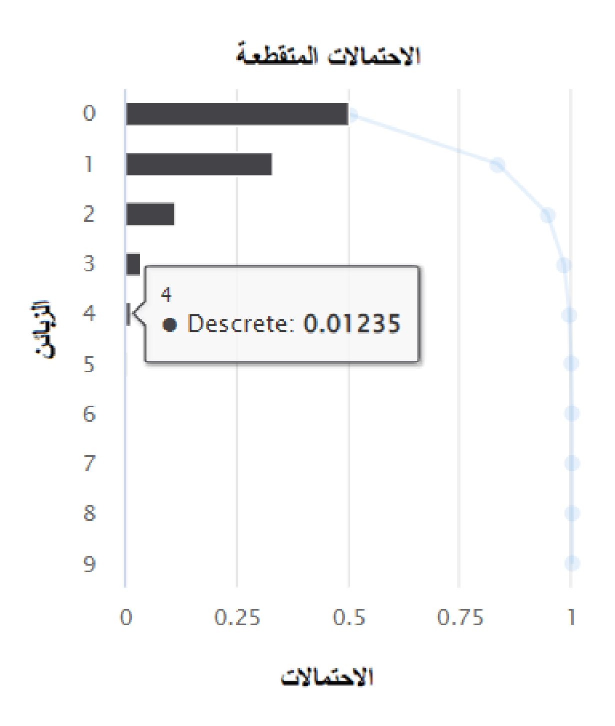
4- متوسط عدد الزبائن الموجود في النظام: $L=L_s+L_q=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$.

5- متوسط الزمن الذي يستغرقه الزبون في النظام: $W=\frac{L}{\lambda}=\frac{3/4}{2}=\frac{3}{8}\min$.

6- متوسط الزمن الذي يستغرقه الزبون في صف الانتظار: $W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{1}{24}\min$.

7- احتمال وجود 4 زبائن في النظام مثلا: $P_4=\frac{(2/3)^4}{2^2 2!}\frac{1}{2}=0.01235$.

تمثيل احتمالات وجود زبائن في النظام في الشكل التالي:



من الواضح أن أداء الخدمة تحسن بعد اضافة مركز جديد.

مسألة عامة:

الجزء الأول:

أجريت دراسة حول ميناء الجزائر فيما يخص وصول السفن المتوسطة الحجم و حساب مدة تفريغها من حمولتها حتى يتسنى للقائمين على هذا الميناء تحسين أداء جودة الخدمة من خلال تقليص زمن تفريغ كل سفينة، حيث شملت الدراسة 30 يوم وكان عدد السفن الوافدة مبين في الجدول التالي:

5	1	1	1	3	4	1	2	2	5
1	4	3	2	3	1	5	3	4	5
3	3	4	3	4	5	1	2	1	2

المطلوب:

هل أن وصول السفن لهذا الميناء يخضع لتوزيع بواسون؟ استخدم $\alpha = 0.05$.

حل الجزء الأول:

تشكيل الفرضيات:

H_0: بيانات العينة تخضع لتوزيع بواسون

H_1: بيانات العينة لا تخضع لتوزيع بواسون

بمأن عدد السفن الوافدة في 30 يوم هو 84 فالتقدير بواسطة الجوازية العظمى Maximum likelihood[1] (ML) لمتوسط توزيع بواسون هو :

$$\hat{\lambda} = \frac{84}{30} = 2.8 \text{ arrivals/day}$$

أو

$$\hat{\lambda} = \frac{84}{30 \cdot 24} = 0.116 \text{ arrivals/h}$$

من قانون بواسون: $P\left(X = x_i\right) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

نحسب التكرار المتوقع E_i وفقا للجدول الاتي:

$$\hat{\lambda} = 2.8 \text{ arrivals/day}$$

[1] - تعتبر هذه الطريقة احدى أهم الطرق انتشارا في الاحصاء لتقدير معالم النموذج الاحتمالي المقترح ، تنسب هذه الطريقة الى رونالد فيشر والتي قدمها في مقال نشره سنة 1922 ، وهناك طرق أخرى نذكر منها طريقة العزوم لبيرسون وطريقة المربعات الصغرى.

العدد(x_i)	الاحتمالات$P(x_i)$	$E_i = 30P(x_i)$
1	0.17	5,1
2	0.238	7,14
3	0.222	6,66
4	0.155	4,65
5 فما فوق	0.215	6.45

نستخدم الجدول التالي لتسهيل الحساب

العدد	التكرار المشاهد O_i	التكرار المتوقع E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	8	5,1	1,65
2	5	7,14	0,64
3	7	6,66	0,017
4	5	4,65	0,026
5	5	6.45	0.325
			$\chi^2 = 2.658$

$v = k-1-r = 5-1-1 = 3$ ، $\chi^2_{0.05,3} = 7.81$.

r : عدد المعلمات المقدرة، في مثالنا تساوي 1 لأننا قدرنا معلمة واحدة وهي (λ).

الاستنتاج: بمأن χ^2 المحسوبة (2.658) ، تقع في منطقة قبول H_0 وبالتالي نستنتج أن مدة وصول السفن إلى الميناء تتبع توزيع بواسون .

الجزء الثاني:

تم قياس زمن انتظار تفريغ السفن (بحيث تصل السفينة A الى رصيف الميناء وفي نفس الوقت تمر قبلها سفينة أخرى دخلت إلى الرصيف)، نعتبر أزمنة خدمة السفن ماركوفية (عشوائية) وتختلف من سفينة إلى أخرى، ولمعرفة وصول السفينة إلى رصيف الميناء حتى لحظة خروجها تم اختيار 6 أيام وتم حساب متوسط زمن الخدمة بالأيام ، فكانت النتائج لمتوسط زمن التفريغ اليومي كما يلي: (0.08 ، 0.25 ، 0.33 ، 0.4 ، 0.43 ، 0.5)، نريد معرفة أن مدة التفريغ (مدة خدمة السفينة) تتبع التوزيع الأسي، المطلوب:

1- قدر المعلمة μ للقانون الأسي $\mu e^{-\mu x}$ ؟

13- أجري مقارنة بين التوزيع المشاهد والتوزيع النظري باستخدام اختبار كولموغوروف – سميرنوف KS ؟

14- ماهي خصائص اختبار كولموغوروف – سميرنوف[1]؟

حل الجزء الثاني:

1- التقدير الرياضي للتوزيع الأسي هو $E(X)=\frac{1}{\mu}$ ، لتقدير μ يكفي تقديرها نقطيا بأخذ المتوسط الحسابي لتفريغ السفن وهي:

$\frac{1}{\mu}=\frac{0.08+0.25+0.33+0.4+0.43+0.5}{6}=0.333$ ، ومنه: $\mu = 3 \text{ services}/day$

صياغة الفرضية تكون كما يلي:

$H_0 :$ مدة تفريغ السفن تتبع التوزيع الأسي وفقا للمعلمة 3

[1] - **نيكولاي سيميرنوف (1900 – 1966) Nikolai Smirnov** ، رياضياتي سوفياتي.

مدة تفريغ السفن لا تتبع التوزيع الأسي وفقا للمعلمة $H_1: 3$

2- اختبار KS :

التابع التوزيعي التجريبي يعرف كما يلي:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & t < t_{(1)} \\ \frac{i}{n} & t_{(i)} \le t < t_{(i+1)} \\ 1 & t \ge t_{(n)} \end{cases}$$

نعرف المسافة D_n بين F و F_n كما يلي:

$$D_n = \max_{1 \le i \le n} \left(\max \left\{ F_n(x_i) - F(x_i) \quad , \quad F(x_i) - F_n(x_i) + \frac{1}{n} \right\} \right)$$

لحساب $D_{\max}$ هناك جداول KS مع إعطاء n و α (هذا بالنسبة للعينات الصغيرة)، أما بالنسبة للعينات الكبيرة نستخدم صيغة التقريب التالية:

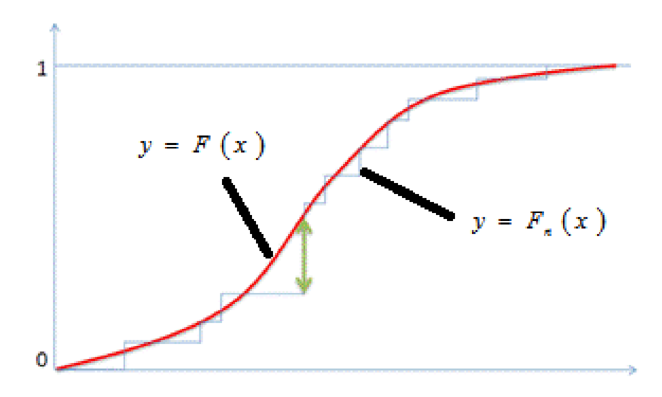
$$P\left(D_n \ge \sqrt{\frac{2}{n}} c \right) \approx 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot e^{-2k^2 c^2}$$

رفض H_0 إذا كانت $P - value < \alpha$.

والشكل التالي يبين التابعيين التوزيعيين:

الشكل (12-14): اختبار KS

اختبـــار K – S



التابع التوزيعي للقانون الأسي بالنسبة للقيم الموجبة تعطى وفقا للصيغة التالية :

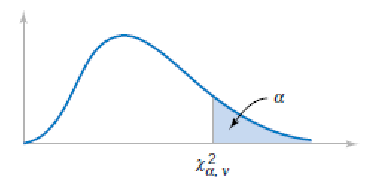
$$F(X)=\begin{cases}1-e^{-\mu x} & ; \quad x\geq 0\\ 0 & ; \quad x<0\end{cases}$$

$$F(X)=1-e^{-3x}$$

	1	2	3	4	5	6
x_i	0.08	0.25	0.33	0.4	0.43	0.5
التكرار التجميعي المشاهد (التجريبي) $F_n(x_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
الدالة التجمعية للتوزيع النظري $F(x_i)$	0.213	0.527	0.628	0.698	0.724	0.776
الفرق d_i^+ بالقيمة المطلقة	0.046	0.194	0.128	0.032	0.108	0.223
الفرق d_i^- بالقيمة المطلقة	0.12	0.028	0.038	0.133	0.058	0.057

أكبر انحراف موجود في العمود السادس $D_{\max}=0.223$ من **جدول كولموغوروف–سيميرنوف** $n=6$ و $\alpha=0.05$ نجد $D_{\alpha}=0.521$، $(0.224<0.521)$ $(D_{\max}<D_{\alpha})$ ومنه نقبل بـH_0 ونستنتج أن مدة تفريغ السفن تتبع التوزيع الأسي.

جدول كي تربيع:



$\chi^2_{\alpha,v}$

	α														
ν	**0.001**	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.250**	**0.500**	**0.750**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**	**0.999**
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21

								4						
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.3	42.9	37.6	34.7	32.3	29.7	27.9	24.6

								3	4	9	6	6	1	9	7
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

جدول كولموغوروف– سيميرنوف

$D_\alpha(n)$ العتبات الحرجة					
n	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404

$D_\alpha(n)$					
n	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.210	0.220	0.240	0.270	0.320
30	0.190	0.200	0.220	0.240	0.290
35	0.180	0.190	0.210	0.230	0.270
> 35	$1.07/\sqrt{n}$	$1.14/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

ملاحظة:

بالنسبة للمشاهدات الكبيرة ، يفضل استخدام البرامج الجاهزة كبرنامج spss مثلا ، حيث نستغني عن الجداول الاحصائية ، وتتم فقط مقارنة القيمة الاحتمالية p–value مع مستوى المعنوية α.

3–خصائص اختبار كولموغوروف– سميرنوف K–S

يتميز اختبار كولموغوروف– سميرنوف ببعض الخواص نوجزها فيما يلي:

إن D_k تعبر عن أبعد نقطتان بين دالتي التوزيع الاحتمالية للتوزيع التجريبي والتوزيع النظري، إن اختبار KS يتعلق بجودة التوفيق (goodness of fit) بين توزيع نظري (مراقب) وتوزيع تجريبي، كما هو الشأن في اختبار χ^2 ، والفرق بين الاختبارين هو أن اختبار KS يتعلق بالمتغيرات المستمرة (لأنه يتعامل مع دالة التوزيع التجميعي (التابع التوزيعي))، أما اختبار χ^2 فيتعلق بالمتغيرات المتقطعة.

– يوجد فرق في المسافة بين KS و χ^2 ، فبالنسبة لمسافة KS معرفة بالضبط، أما مسافة χ^2 فهي معرفة بالتقريب.

الجزء الثالث:

باستخدام نفس المعلومات الواردة في الجزئيين الأول والثاني، نود الحصول على خصائص التشغيل لنظام صف الانتظار لهذا الميناء في الحالتين التاليتين:

1– وجود رصيف واحد للتفريغ.
2– وجود رصيفين للتفريغ.

حل الجزء الثالث:

نلاحظ أن وحدة القياس الشائع هي الساعة في الأعمال، إذن:

λ=2.8 arrivals/day = 0.116 arrivals/h
μ=3 services/day = 0.125 services/h

أولا: وجود رصيف واحد للتفريغ:

1– معامل الاستخدام (كثافة الحركة في الميناء): $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.116}{0.125} = 0.928$.

2– احتمال عدم وجود أي سفينة في النظام (متوسط الخمول):

$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 0.072$.

3– احتمال وجود 5 سفن في النظام مثلا: $P_5 = 0.072(0.928)^5 = 0.0495$.

4– متوسط عدد السفن الموجودة في النظام:

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.116}{0.125 - 0.116} = 12.88$.

5-متوسط الزمن الذي تستغرقه السفينة في النظام: $W=\frac{L}{\lambda}=\frac{12.88}{0.116}=111\,h$.

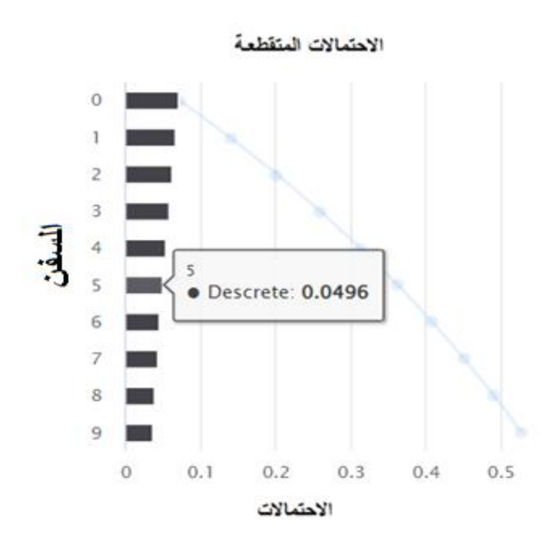
6-متوسط الزمن الذي تستغرقه السفينة في صف الانتظار:

$$W_q=W-\frac{1}{\mu}=111-\frac{1}{0.125}=103\,h$$.

7- متوسط عدد السفن الموجودة في صف الانتظار:

$$L_q=\lambda\cdot W_q=0.116\cdot 103\simeq 12$$.

تمثيل احتمالات وجود سفن في النظام في الشكل التالي:



ثانيا: وجود رصيفين للتفريغ:

1- معامل الاستخدام (كثافة الحركة في الميناء):

$$\frac{\lambda}{\mu S}=\frac{0.116}{0.125\times 2}=0.464$$

2- احتمال عدم وجود أي وحدة في النظام (متوسط الخمول):

$$P_0=\frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^s}{(S-1)!(S-\rho)}\right]}=\frac{1}{1.928+\frac{(0.928)^2}{1\cdot(1.072)}}=0.366$$

3- متوسط عدد السفن الموجودة في صف الانتظار:

$$L_q=P_0\frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}=0.366\cdot\frac{(0.928)^3}{1\cdot(1.072)^2}=0.254$$

4- متوسط عدد السفن الموجودة في النظام:

$$L=L_s+L_q=0.928+0.254=1.182 .$$

5- متوسط الزمن الذي تستغرقه السفينة في النظام:

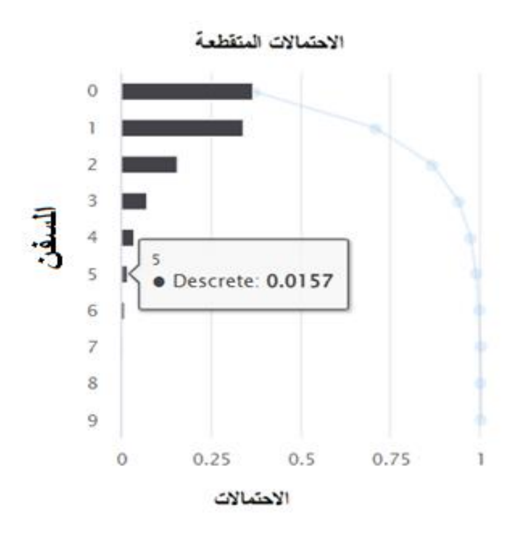
$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{1.182}{0.116}=10.18\ h .$$

6- متوسط الزمن الذي تستغرقه السفينة في صف الانتظار:

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=2.18\ h .$$

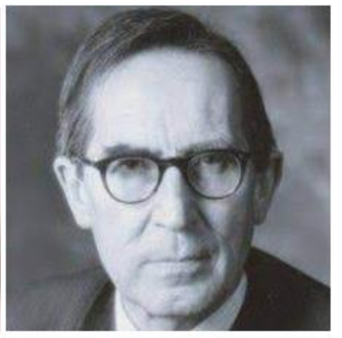
7- احتمال وجود 5 سفن في النظام مثلا: $P_5=\frac{(0.928)^5}{2^5 2!}0.366=0.0157$.

تمثيل احتمالات وجود سفن في النظام في الشكل التالي:



من الواضح أن أداء الخدمة تحسن بعد اضافة رصيف ثاني.

الأعلام المذكورة في الفصل الثاني عشر:

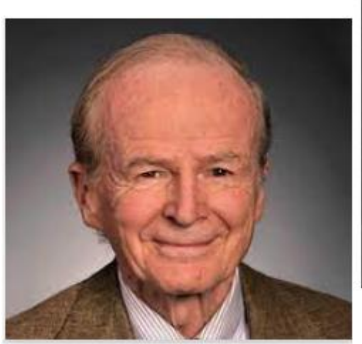


ديفيد جورج كيندال
David George Kendall
(2007 - 1918)

سيميون دينيس بواسون
Siméon Denis Poisson
(1840 -1781)

أغنر كراروب إرلانغ
Agner Krarup Erlang
(1929 – 1878)

نيكولاي سيميرنوف
Nikolai Smirnov
(1966 – 1900)



John Little (- 1928) جون ليتل

الفصل الثالث عشر : إدارة المخزون المثلى: Optimum inventory management

تمهيد:

للمخزون أهمية كبيرة في المؤسسة باعتباره جزءا من ممتلكاتها، ويعتبر موضوع التبادل التجاري إذ يمثل جزء من الأصول المتداولة المشترة من أجل البيع (حالة المؤسسات التجارية) أو من التصنيع ثم البيع (حالة المؤسسات الصناعية).

يساعد الفهم الجيد لنماذج إدارة المخزون من تعزيز أعمال المؤسسة في أخذ التدابير المثالية في تقليل التكاليف، حيث أن الهدف من دراسة نماذجه هو التحكم في المخزون قصد الحصول على أكبر فائدة ، فقد تحتاج المؤسسة إلى التأكد من أن المخزون كافي لتتمكن من الاحتفاظ بولاء زبائنها، من جهة أخرى المؤسسة كذلك تفضل عدم التحمل المزيد من تكاليف هذا التخزين.

13-1- أنواع المخزون:

ينقسم المخزون إلى:

مواد أولية ومستلزمات إنتاج Raw Material

منتجات نصف مصنعة أو منتجات قيد الانجاز Work in Process

منتجات مصنعة (المنتجات النهائية) Finished Goods

قطع غيار لعمليات الصيانة والإصلاح للمعدات Spare Parts

13-2- أنواع تكاليف المخزون:

تشكل تكاليف الطلب والاحتفاظ والعجز العناصر الرئيسية الثلاث للتكاليف المتعلقة بالمخزون، تفصل هذه المجموعات على نطاق واسع بين العديد من تكاليف المخزون المختلفة الموجودة، وسنقوم بتحديد ووصف بعض الأمثلة لهذه الأنواع:

13-2-1- تكلفة إعداد الطلبية Ordering costs :

تعرف كذلك باسم setup costs ، هي تكاليف يتم تكبدها في كل مرة تقوم فيها المؤسسة بتقديم طلب للمورد الخاص بها، تصنف هذه التكاليف كتكاليف ثابتة ، أما عدد الطلبيات فيحسب كما يلي:

N=D/Q

D = الكمية السنوية المطلوبة.

Q = حجم الطلبية.

تكلفة الطلب السنوية هي عدد الطلبيات × تكاليف الاعداد: $AOC=\frac{D\cdot B}{Q}$ ، حيث B هي تكلفة الاعداد.

13-2-2- تكلفة الاحتفاظ بالمخزونHolding costs :

هي التكاليف التي ينطوي عليها تخزين المنتج قبل بيعه (مصاريف الكهرباء، مصاريف التبريد،....)، فهي التكلفة المباشرة التي يجب حسابها للعثور على أفضل فرصة لتخزين المنتج بدل من استثماره في مكان أخر بافتراض أن الطلب ثابت.

13-2-3- تكلفة العجز Shortage costs:

تكلفة نفاد المخزون في المؤسسة تتوقف على الأسباب التالية:

أولا: تعطل الإنتاج: عندما ينطوي العمل على إنتاج سلع بالإضافة إلى بيعها، فإن العجز يعني أن الشركة ستضطر إلى دفع تكاليف أخرى مثل العمال العاطلين عن العمل ونفقات المصنع ، حتى عندما لا يتم إنتاج أي شيء.

شحنات الطوارئ بالنسبة لتجار التجزئة، قد يعني نفاد المخزون دفع مبلغ إضافي للحصول على شحنة في الوقت المحدد، أو تغيير ولاء الزبائن بصرف النظر عن خسارتهم (ذهابهم إلى مكان آخر لإجراء عمليات الشراء أي فقدانهم)، بالإضافة إلى تزعزع سمعة المؤسسة.

ثانيا: تكاليف التلف Spoilage costs :

يمكن أن يتعفن المخزون القابل للتلف أو يفسد إذا لم يتم بيعه في الوقت المناسب ، لذا فإن التحكم في المخزون لمنع التلف أمر ضروري، تعد قابلية الفناء مصدر قلق للعديد من الصناعات مثل الصناعات الغذائية والمشروبات والأدوية والرعاية الصحية ومستحضرات التجميل ، وكلها تتأثر بانتهاء صلاحية منتجاتها واستخدامها، لا يكلف الفساد المال فحسب ، بل يعني أيضا أن المؤسسة تفشل في تحقيق عائد على استثمارها الأولي.

13-3- مفاهيم أساسية حول المخزون:

13-3-1- حجم الطلبية Quantity ordered:

عدد الوحدات من المخزون التي يتم استلامها ووضعها في المخزن.

13-3-2- دورة الطلب Order cycle :

هي الفترة الزمنية التي تفصل بين طلبيتين متلاحقتين، وتقاس إما باليوم أو الأسبوع أو الشهر أو السنة.

13-3-3- فترة التوريد lead time :

عدد الأيام بين إصدار أمر الشراء ووصول الشحنة إلى المخازن واستلامها.

13-3-4- متوسط الاحتياج اليومي (معدل الطلب) Average Daily Usage:

قبل أن يتمكن مسؤول المخزن من تحديد نقطة إعادة الطلب ، يحتاج إلى معرفة عدد الوحدات التي سيتم بيعها كل يوم ، يفعل ذلك عن طريق إضافة طلبياتهم اليومية على مدى فترة معينة وقسمة الاجمالي على عدد الأيام في تلك الفترة.

13-3-5- نقطة إعادة الطلب reorder point :

نقطة إعادة الطلب ليست رقما ثابتا، إنها تعتمد على دورات الشراء والمبيعات الخاصة بالمؤسسة، وهو الزمن الذي يجب فيه إعادة الطلب ، وتختلف على أساس كل منتج،

ومع ذلك بمجرد أن تتعامل المؤسسة مع أنماط المنتج فهي على استعداد لبدء تجميع المتغيرات معا.

صيغة نقطة إعادة الطلب هي :

نقطة إعادة الطلب = معدل الطلب أو الاحتياج اليومي × فترة التوريد (الانتظار)

$$ROP = d \times L$$

إذ أن :

ROP = نقطة إعادة الطلب

d = معدل الطلب(الاحتياج اليومي) ونحصل عليه بقسمة الطلب السنوي D على عدد أيام العمل بالسنة.

L = فترة التوريد/الانتظار

13-3-6- مخزون الأمان safety stock :

يشبه مخزون الأمان نقطة إعادة الطلب، ولكنه يمثل كمية فائضة لضمان عدم نفاد المخزون بالكامل في حالة حدوث تأخير في الطلبية.

13-3-7- المخزون الاحتياطيBuffer stock :

مفهومه هو شراء السلع عند وجود فائض في السوق وتخزينها ثم بيعها في وقت الأزمة.

مثال1:

حقق متجر مختص ببيع المشروبات الغازية في 30 يوم 600 عملية بيع علبة (كل علبة تحوي على 1000 قارورة)، يستغرق هذا المنتج من المصنع (المورد) إلى هذا المتجر ثلاثة أيام بعد تقديم الطلب، يعني أن متوسط التوريد هو ثلاثة أيام.

المطلوب: حساب نقطة إعادة الطلب.

حل المثال1:

معدل الطلب(الاحتياج اليومي): $d = \frac{600}{30} = 20$.

يستغرق هذا المنتج من المصنع (المورد) إلى هذا المتجر ثلاثة أيام بعد تقديم الطلب، يعني أن متوسط فترة التوريد هو ثلاثة أيام($L = 3$) .

نقطة إعادة الطلب هي 60 علبة:

$$RP = L \times d = 3 \times 20 = 60$$

يعني هذا أنه عندما يكون لدى هذا المتجر 60 علبة من هذا المشروب فسيلزمهم تقديم طلب جديد للتأكد من أن لديهم الكمية الصحيحة لتلبية الطلب.

13-4- نماذج المخزون:

نتطرق إلى النماذج الحتمية والنماذج الاحتمالية:

13-4-1- النموذج الحتمي The Deterministic Model :

في نماذج المخزون الحتمية يفترض أن الطلب ثابت ومعروف، ومن المفترض أيضا أنه عند طلب دفعة فإنها تصل بالضبط في الوقت المتوقع، علاوة على ذلك عندما يظل نمط الطلب ثابتا بمرور الوقت يعرف نمط المخزون تماما، وبالتالي فإن المعلمات مثل الحد الأقصى والحد الأدنى لمستويات المخزون معروفة تماما، وتعرف كذلك باسم الحد الأقصى – الحد الأدنى لنماذج المخزون.

أولا: كمية الطلب الاقتصادية (Economic order quantity (EOQ

يعرف كذلك هذا النموذج بنموذج ويلسون ، ويشير إلى كمية الطلب المثالية التي يجب على المؤسسة شراؤها لتقليل تكاليف المخزون ، مثل تكاليف الاحتفاظ وتكاليف العجز وتكاليف الطلبية ، تتمثل مهمة إدارة المخزون في حساب عدد الوحدات التي يجب على المؤسسة إضافتها إلى مخزونها مع كل طلبية لتقليل التكاليف الإجمالية لمخزونها.

على الرغم من أن هذا النموذج غالبا ما يرتبط بمصادر المواد الخام والإدارة المثلى للمخزون ، تجدر الإشارة إلى أنه يمكن تطبيق منهجية ويلسون على أي نوع من السلع.

عرضه في الأصل المهندس الأمريكي Ford Whitman Harris[1] في عام 1913 ، ولم ينجح Wilson حتى عام 1934 في تطوير هذه الصيغة، ولكن كيف تم حساب الكمية المثلى لطلبية ما؟ سنرى ذلك في الفقرات القادمة.

فرضيات هذا النموذج كما يلي:

[1] - ويتمان هاريس (1877- 1962) Ford Whitman Harris مهندس أمريكي استخلص صيغة الجذر التربيعي لطلب المخزون المعروف الآن باسم كمية الطلب الاقتصادية.

- الطلب معروف ومحدد، ثابت على طول الوقت.
- العجز في المخزن غير مسموح به.
- تثبيت أوقات الانتظار لاستلام الطلبيات.
- استلام الكمية المطلوبة وقت طلبها.

أ- مزايا هذا النموذج:

بالنسبة للمؤسسات التي تستوفي هذه الشروط تضمن هذه الطريقة الرياضية تحسين إدارة المخزون، في الواقع تتمتع هذه الطريقة بالمزايا التالية:

أن المؤسسة تقلل من تكاليف الشراء والتخزين.

أنها تتجنب الإفراط في التخزين، ولكن تتأكد من وجود مخزون كاف لتلبية الطلب.

أنها تعرف الكمية المحددة للشراء لكل طلبية.

أنها تتجنب نقص المخزون.

ب- عيوب طريقة نموذج EOQ :

تكمن العيوب الرئيسية لنموذج ويلسون أو نظام EOQ في نفس الافتراضات التي تم وضعها سابقا، حيث إنها تحد من التطبيق وتبعد النموذج عن المواقف الحقيقية التي تواجه المؤسسة في كثيرا من الأحيان، بشكل أكثر تحديدا فإن العيوب الرئيسية للنموذج هي كما يلي:

- تجعل افتراضات النموذج غير عملي أو واقعي للعديد من الشركات بسبب خصائصها، إن افتراض الطلب المستمر يجعل نموذج EOQ غير مفيد

للشركات ذات الطلب الموسمي أو لمرة واحدة أو غير المنتظم ، أو يمكن أن يؤدي إلى أخطاء في مواجهة تغيير جذري في عادات بعض الزبائن.

- عدم النظر في الخصومات على حجم الشراء يستثني من المعادلة متغيرا مهما للغاية يمكنه إدارة تعويض تكاليف التخزين.
- افتراض الفورية في إعادة بناء المخزون ليس واقعيا تماما وبدون مراعاة هذا المتغير قد تكون هناك حالات نفاد يجب أخذها في الاعتبار بعناية عند تنفيذ النموذج.

مثال3:

مؤسسة تركيب الدرجات النارية تقوم بشراء محركات ميكانيكية من شركة مختصة ، تحتفظ هذه المؤسسة بمخزون من المحركات الميكانيكية يقدر بـ 3000 محرك يوضح الشكل (أ) مستوى المخزون كدالة للزمن (مع وجود المحور y في مقياس 100 وحدة) في البداية هناك 3000 محرك في المخزن، تستخدم هذه المؤسسة 1000 محرك في اليوم، وبالتالي في نهاية اليوم الأول ستبقى 2000 وحدة فقط في المخزن، في نهاية اليوم الثاني هناك 1000 وحدة متبقية ، وهكذا في نهاية اليوم الثالث تنفد المحركات من المخزن، نفرض وصول شحنة جديدة من المحركات تحتوي على 3000 وحدة ، يزيد من مستوى المخزون في اليوم الثالث إلى 3000 وهكذا ، بهذه الطريقة يمكن تمثيل مستوى المخزون في نهاية كل يوم بنقطة.

توضح النقاط في الشكل (أ) عدد الوحدات في نهاية كل فترة ومع ذلك إذا أراد المسؤول إظهار تباين حقيقي في مستوى المخزون بمرور الزمن فيمكنه أن يلاحظ المستوى في فروق زمنية متناهية الصغر، ينتج عن هذا منحنى بدلا من سلسلة من النقاط نظرا لعدم ذكر أي شيء عن النمط الذي يتم من خلاله سحب 1000 وحدة من المخزون كل يوم ، يمكن أن يكون للمنحنى بين نهايتين متتاليتين لنقاط اليوم أي شكل، ومع ذلك في النموذج الحالي من المفترض أن يكون شكل المنحنى بين النقاط

خطي وبالتالي يمكن تغيير العرض التوضيحي في الشكل (أ) إلى العرض الموضح في الشكل (ب)، من هنا فصاعدا سيتم اعتماد هذا التمثيل البياني الخطي لجميع حالات النموذج الحتمي ، هناك عدة مفاهيم في تصميم انظمة التخزين يمكن شرحها الان باستخدام الشكل ب.

1. قد يطلق على النظام نظام الحد الأقصى – الحد الأدنى لأن عدد الوحدات في نظام التخزين يختلف بين حد أقصى ثابت وحد أدنى ثابت.

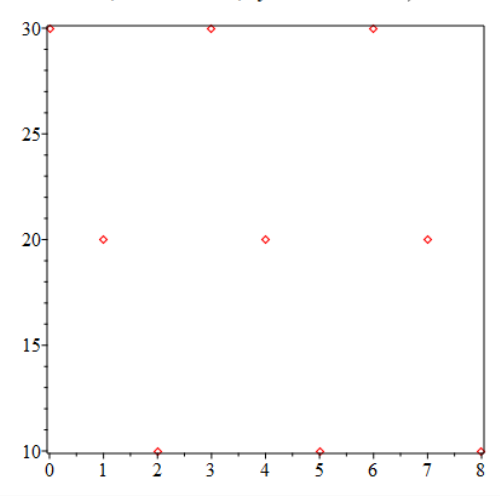
2. الحد الأدنى في هذا النموذج يتوافق مع الصفر نظرا لأن صانع القرار على يقين من أن ما تم طلبه سيصل بالضبط في الوقت المتوقع، فلا داعي للقلق إذا نفد المخزون للحظة، ومع ذلك كما سنرى لاحقا ليس هذا هو الحال حيث تكون هناك شكوك في ذلك (زمن
وصول الشحنة الجديدة أو كميات الطلب).

3. كما هو موضح في الشكل (ب) من المفترض أن كل شيء تم طلبه يصل إلى نقطة زمنية واحدة، وبالتالي رفع مستوى المخزون على الفور في الأيام 3 و6 و 9 مثلا، علاوة على ذلك من الواضح أن الحد الأقصى للمخزون في هذه الحالة يساوي الكمية المطلوبة.

الشكل (13-1): نموذج EOQ

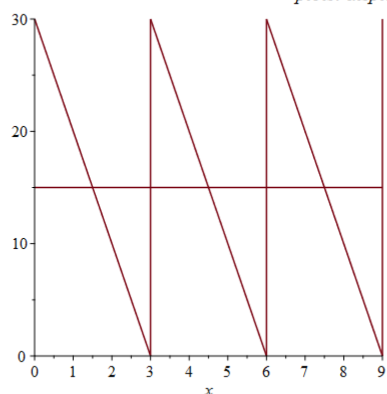
الشكل (أ) باستخدام برنامج Maple

```
> with(plots) :
> pointplot(Matrix([[0, 30], [1, 20], [2, 10], [3, 30], [4, 20], [5, 10], [6, 30], [7, 20], [8, 10]],
    datatype = float), axes = boxed, color = red , symbolsize = 15)
```



الشكل (ب) باستخدام برنامج Maple

```
plots:-display([plot([-10 x + 30 ], x = 0 ..3), plot([15 ], x = 0 ..9), plot([-10 x + 60 ]
    , x = 3 ..6), plot([-10 x + 90 ], x = 6 ..9),
    plot([3, x, x = 0 ..30 ]), plot([6, x, x = 0 ..30 ]), plot([9, x, x = 0 ..30 ])])
```



ت- صياغة النموذج:

لتصميم نظام التخزين هذا من الضروري إيجاد العديد من المعلمات الكمية التي يمكن من خلالها تعريف النظام بشكل جيد، يجب أن تكون قيم هذه المعلمات قد نمذجت بهدف تخفيض التكلفة الإجمالية لتشغيل نظام التخزين، من الشكل (ب) من الواضح أن هذا النظام يمكن تحديده من خلال ثلاثة معايير: الطلب ، والحد الأقصى لمستوى

المخزون ، ومستوى المخزون الأدنى، من المفترض كذلك أن الطلب ثابت ولا يتحكم المسؤول في هذه المعلمة أيضا كما تم ذكر سلفا ، بالنسبة لهذا النموذج يكون الحد الأدنى لمستوى المخزون هو صفر دائما، وبالتالي فإن المعلمة الوحيدة التي يجب تحديدها في هذه الحالة هي الحد الأقصى لمستوى المخزون، من ناحية أخرى تم ذكر أن الحد الأقصى لمستوى المخزون لهذا النموذج هو الكمية المطلوبة، يمكن تعريف نمذجة النظام على أنه إيجاد كمية الطلب التي تقلل التكلفة الإجمالية، تسمى كمية الطلبية (المثلى) (EOQ).

لإيجاد القيم المثلى لمعلمات نظام التخزين ، تتم صياغة النظام كمسألة تحسين (أمثلة) وفقا للإجراء التالي، أولا يتم تحديد فترة التحليل المناسبة (عادة ما تكون سنة واحدة)، ثم يتم تقييم التكلفة الإجمالية للاحتفاظ على المخزون خلال هذه الفترة كدالة لمعلمات النظام التي يمكن التحكم فيها، بعهدها يتم تصغير(تدنية) هذه الدالة عن طريق التفاضل أو أي تقنية رياضية أخرى قابلة للتطبيق للحصول على القيم المثلى للمتغيرات القابلة للتحكم في النظام، لصياغة نموذج EOQ ، يتم استخدام الترميز التالي:

Q = كمية الطلب.

Q^* = كمية الطلب المثلى (EOQ).

D= متوسط الطلب للفترة (سنة).

B = التكلفة المرتبطة بكل طلبية تم وضعها (تكلفة إعداد الطلبية).

H = تكلفة تخزين وحدة من المنتج لفترة محددة (تكلفة الاحتفاظ بالمخزون).

TC: التكلفة الاجمالية لكل فترة.

كما ذكرنا ، المتغير الوحيد القابل للتحكم في هذا النظام هو كمية الطلبية، وبالتالي يجب تحديد التكلفة الإجمالية من حيث هذا المتغير، تتكون التكلفة الإجمالية لهذا

النظام من نوعين مختلفين من التكاليف، هي تكاليف الاحتفاظ بالمخزون وتكاليف الطلب أو الإعداد (تكاليف ثابتة).

دائما ما تكون تكاليف الاحتفاظ بالمخزون موجودة وتعتمد على عدد الوحدات الموجودة في المخزون وطول الوقت الذي يتم الاحتفاظ بها، في مثال المحرك الميكانيكي، نفترض أن الاحتفاظ بمحرك واحد في المخزون ليوم واحد يكلف دينارا واحدا، وفقا للرمز الخاص بنا H

هذا يعني أنه إذا تم الاحتفاظ بـ 1000 وحدة في المخزن، فإن المؤسسة تتحمل تكلفة 1000 × 1= 1000 دج في اليوم، إذا كانت كمية المواد المحفوظة في المخزن ثابتة طول الوقت، ولكن نظرا لأن مستوى المخزون يختلف من يوم إلى آخر، فإن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون كذلك، من الشكل (ب)، يمكن للمسؤول أن يلاحظ أن مستويات المخزون تختلف من 0 إلى 3000 وحدة مع اختلاف تكلفة الاحتفاظ الناتجة من 0 إلى 3000 × 1 = 3000 دج في اليوم.

لإيجاد متوسط تكلفة المخزون اليومية ، يمكن لمسؤول التخزين أن يفكر في إيجاد تكلفة الاحتفاظ بالمخزون لكل يوم وحساب متوسطها، هناك طريقة أخرى لتقدير نفس القيمة وهي إيجاد متوسط عدد الوحدات المحفوظة في المخزن وضرب ذلك في تكلفة الاحتفاظ، نظرا لأنه يتم حساب معظم تكاليف خلال الفترة على أساس سنوي، سيكون من الصعب جدا تقييم

تكلفة الاحتفاظ لكل يوم من 365 يوما في السنة، كما سنرى في الفقرة التالية تقييم متوسط المخزون وضربه في المخزون السنوي.

تكلفة الاحتفاظ بالوحدة أسهل بكثير، نظرا لأننا نفترض أن الاختلافات في مستويات المخزون خطية، فمن السهل أن نلاحظ أن متوسط المخزون يساوي متوسط الحد الأقصى والحد الأدنى لهذه المستويات.

متوسط المخزون = (الحد الأقصى للمخزون + الحد الأدنى للمخزون)/2

$$A.I(I) = \frac{I_{Max} + I_{Min}}{2}$$

ومع ذلك ، نعلم أن الحد الأدنى لنظامنا التخزيني يساوي صفر، والحد الأقصى هو كمية الطلبية فقط.

$$A.I(I) = \frac{Q+0}{2} = \frac{Q}{2}$$

متوسط تكلفة الاحتفاظ لكل وحدة: $A.H.C = \frac{H.Q}{2}$.

الجزء الثاني من تكاليف المخزون، وهو تكلفة الطلب أو الإعداد، تحدث هذه التكلفة عند تقديم طلب ، ولكن لا يمكن اعتبارها تكلفة يومية أو شهرية، أفضل طريقة لتقييم مساهمة هذه التكلفة في تكلفة المخزون لفترة التقييم هي إيجاد عدد مرات تقديم الطلب في تقييم فترة واحدة على سبيل المثال ، إذا تم تقييم التكاليف سنويا أربع مرات بتكلفة 2500 دج ، فإن تكلفة الطلب في السنة ستكون 4 × 2500 دج = 10000 دج.

بالنسبة لمسألة المحرك الميكانيكي إذا افترضنا تكلفة قدرها 2500 دج للطلب، فيمكن حساب تكلفة الطلب السنوية على النحو التالي:

عدد الطلبيات في السنة = (الطلب السنوي/ الكمية المطلوبة في كل مرة) =

$$\frac{1000 \cdot 365}{3000} = 122$$

تكاليف الطلب السنوية = $2500 \cdot 122 = 305000DA$

نحدد الأن التكرار وتكلفة الطلب لكل فترة للنموذج العام من حيث المتغير الوحيد الذي يمكن التحكم فيه كمية الطلب، نظرا لخروج العناصر من المخزون بمعدل وحدات D لكل فترة ، فإن كل كمية طلب تستمر لفترة من الزمن تقدر $\frac{Q}{D}$ (دورة الطلب)، عدد الطلبيات التي تم وضعها خلال فترة واحدة هو:

عدد الطلبيات لكل فترة = $\frac{D}{Q}$.

وبالتالي ، فإننا نقوم بدفع B مبلغ لكل طلب .

تكاليف الطلبيات خلال الفترة = $\frac{BD}{Q}$.

التكلفة الاجمالية لكل فترة TC = تكلفة الاحتفاظ بالمخزون لكل فترة + تكلفة الطلبية لكل فترة.

$$TC = \frac{H.Q}{2} + \frac{BD}{Q} \text{ ....}(1)$$

هدف المؤسسة هو تدنية التكاليف إلى أقصى حد أي إيجاد كمية الطلب التي تجعل دالة التكلفة في نهايتها الصغرى، أي يتم إيجاد المشتقة الأولى ومساواتها للصفر، ثم التأكد من تعويض هذه الكمية في المشتقة الثانية، فإذا كانت أكبر من الصفر حينئذ نتأكد من أن الدالة تبلغ نهايتها الصغرى عند هذه الكمية.

$$T'_C(Q) = \frac{H}{2} - \frac{BD}{Q^2} = 0\text{.........}(2)$$

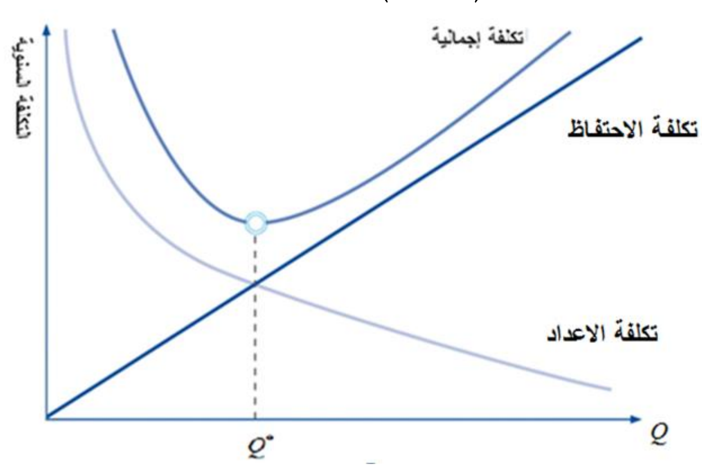
عند حل المعادلة (2) نجد: $Q^* = \pm\sqrt{\frac{2\cdot B\cdot D}{H}}$ ، $\left(-\sqrt{\frac{2\cdot B\cdot D}{H}}\right)$ لا معنى لها اقتصاديا (مرفوضة)، إذن:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\cdot B\cdot D}{H}}$$

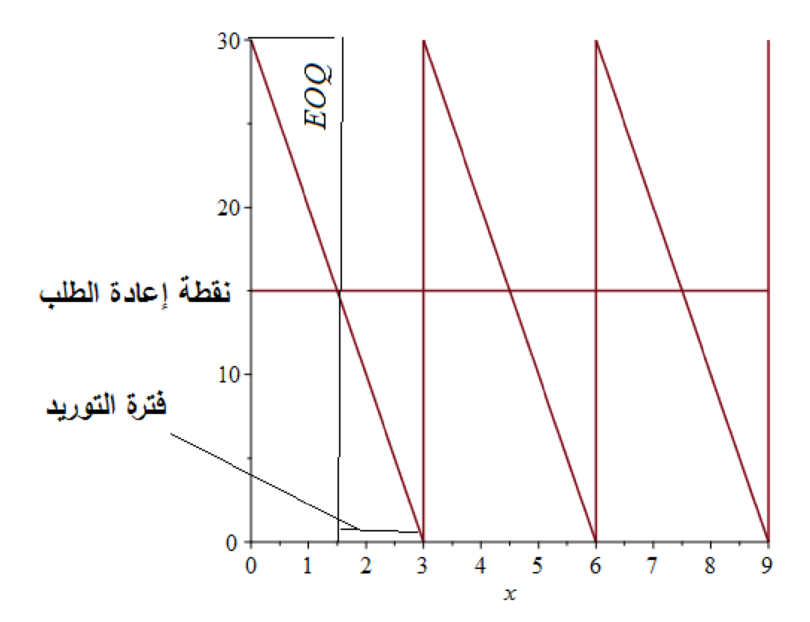
$T''_C(Q) = \frac{2BD}{Q^3} \geq 0$ لأن $Q \geq 0$ ، إذن $TC(Q)$ دالة محدبة.

يوضح الشكل $(2\text{–}13)$ المفاضلة بين تكلفة الاحتفاظ وتكلفة الطلب، الشكل يؤكد حقيقة أنه عند Q^* تكون تكاليف الاحتفاظ والطلب السنوية هي نفسها.

الشكل (13-2): تكاليف المخزون



الشكل (13-3): التمثيل البياني لكمية الطلب الاقتصادية وفترة التوريد ونقطة إعادة الطلب.



مثال4:

مؤسسة الأنوار تستخدم بشكل موحد طوال العام البيانات المتعلقة بالمتطلبات السنوية وتكلفة الطلب وتكلفة الاحتفاظ بمخزونها، حيث:

الطلب السنوي: 9600 وحدة.

تكلفة الطلبية: 400 دج لكل طلبية.

تكلفة الاحتفاظ: 3 دج لكل وحدة.

المطلوب: تحديد كمية الطلب الاقتصادية ؟

حل المثال4:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot D}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 9600}{3}} = 1600\ U$$

كمية الطلب الاقتصادية لهذه المؤسسة هي 1600 وحدة، يمكننا الأن حساب عدد الطلبيات التي سيتم تقديمها سنويا ، وتكلفة الطلب السنوية ، وتكلفة الاحتفاظ السنوية ، وتكلفة الطلبيات السنوية الاجمالية وتكلفة الاحتفاظ على النحو التالي:

عدد الطلبيات في السنة:

عدد الطلبيات لكل فترة $\frac{D}{Q} = \frac{9600}{1600} = 6$ ، 6 طلبيات في السنة.

تكلفة الاعداد: العدد أو الطلبيات في السنة × التكلفة لكل طلب : 6 طلبيات × 400 دج = 2400 دج.

تكلفة الاحتفاظ = متوسط الوحدات × تكلفة الاحتفاظ لكل وحدة :

$$AHC = \frac{1600 \times 3}{2} = 2400DA$$

التكلفة الاجمالية:

$$TC = \frac{H.Q^*}{2} + \frac{BD}{Q^*} = \frac{3 \times 1600}{2} + \frac{400 \times 9600}{1600} = 2400 + 2400 = 4800DA$$

نلاحظ أن كل من تكلفة إعداد الطلبية وتكلفة الاحتفاظ تبلغ 2400 دج بكمية طلب اقتصادية 1600 وحدة.

تحديد جدول لكمية الطلب الاقتصادية:

وفقا لهذا النهج فأنه لتحديد كمية الطلب الاقتصادية يجب حساب تكلفة الطلب والاحتفاظ الاجمالية بعدد مختلف من الطلبيات وكمياتها الخاصة بها، يعرف هذا النهج أيضا باسم طريقة التجربة والخطأ لتحديد كمية الطلب الاقتصادية.

يتم توضيح هذا النهج أدناه باستخدام نفس البيانات المستخدمة في المثال السابق:

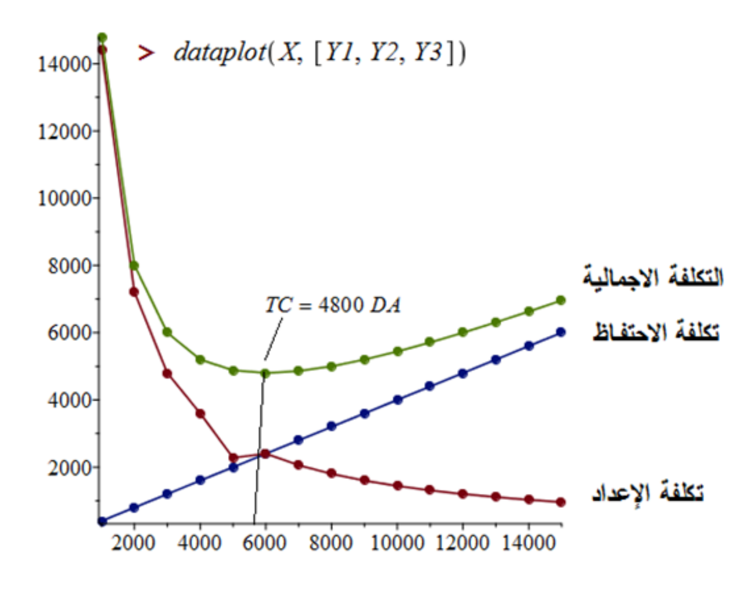
عدد الطلبيات	عدد الوحدات لكل طلبية	متوسط الوحدات لكل مخزون	التكاليف		
			تكلفة الإعداد	تكلفة الاحتفاظ	التكلفة الاجمالية
1	9600	4800	400	14400	14800
2	4800	2400	800	7200	8000
3	3200	1600	1200	4800	6000
4	2400	1200	1600	3600	5200
5	1920	960	2000	2880	4880
6	1600	800	2400	2400	4800

7	1371	685,5	2800	2056,5	4856,5
8	1200	600	3200	1800	5000
9	1067	533,5	3600	1600,5	5200,5
10	960	480	4000	1440	5440
11	873	436,5	4400	1309,5	5709,5
12	800	400	4800	1200	6000
13	738	369	5200	1107	6307
14	686	343	5600	1029	6629
15	640	320	6000	960	6960

تمثيل مختلف التكاليف في منحنى بياني:

باستخدام برنامج Maple يكون التمثيل البياني كالتالي:

```
> X := Vector([1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000, 11000, 12000, 13000,
    14000, 15000], datatype = float[8]) :
> Y1 := Vector([400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400, 2800, 3200, 3600, 4000, 4400, 4800, 5200, 5600,
    6000], datatype = float[8]) :
> Y2 := Vector([14400, 7200, 4800, 3600, 2280, 2400, 2057.142857 , 1800, 1600.5, 1440,
    1309.090909 , 1200, 1107.692308 , 1028.571429 , 960], datatype = float[8]) :
> Y3 := Vector([14800, 8000, 6000, 5200, 4880, 4800, 4857.142857 , 5000, 5200.6, 5440, 5709.090909
  , 6000, 6307.692308 , 6628.571429 , 6960], datatype = float[8]) :
```



نلاحظ أن كمية 1600 وحدة مع عدد 6 طلبيات سنوية وتكلفة طلب واحتفاظ اجمالية تبلغ 4800 دج هي الكمية الأكثر اقتصادا للطلب، كميات الطلبيات الأخرى التي ينتج عنها أكثر أو أقل من ستة طلبيات في السنة ليست اقتصادية للغاية، على سبيل المثال ، إذا تم تقديم طلب واحد فقط للمتطلبات السنوية الكاملة البالغة 9600 وحدة ، فإن تكلفة الطلب والاحتفاظ المجمعة تصل إلى 14800 دج وهي أعلى بكثير من تكلفة كمية الطلب الاقتصادية البالغة 1600 وحدة.

ملاحظة:

إن تطبيق الطريقة الجدولية ليس شائعا لأنه يستغرق وقتا أطول مقارنة بالصيغة الرياضية ، علاوة على ذلك في بعض الحالات توفر فقط تقديرا لكمية الطلب الاقتصادية ، وبالتالي فهي ليست دقيقة مثل الصيغة الرياضية.

ثانيا: التكاليف الإجمالية مع تكلفة الشراء Total Costs with Purchasing Cost

قد يكون هناك خصم على سعر الشراء P فمن الأفضل دراسة تأثيره على كمية الطلب الاقتصادية، والذي نبينه في الفقرة التالية.

أ- كمية الطلب الاقتصادية بوجود خصم Economic order quantity with Discount :

تقلل EOQ بشكل عام من إجمالي تكلفة المخزون، ومع ذلك قد لا تكون EOQ هي الأمثل عند أخذ الخصم في الاعتبار.

ب- خصم الكمية و EOQ

خصم الكمية هو تخفيض في السعر الذي يعرضه البائع على الطلبيات ذات الكميات الكبيرة، توجد خصومات الكمية بأشكال مختلفة وقد لا تكون واضحة في بعض

السيناريوهات، توفر الأشكال المختلفة لخصومات الكمية حوافز شراء مختلفة للمشترين، في الفقرة القادمة نبين تأثير الخصم في صناعة قرار الشراء.

ت- المشاركة في صنع القرار

عندما يتاح للمشترين الذين يتبعون نموذج كمية الطلب الاقتصادي (EOQ) لطلب المخزون الفرصة للاستفادة من خصم الكمية على أحجام الطلبيات الأكبر من EOQ الخاصة بهم ، فإنهم بحاجة إلى بناء قرارهم بصرف النظر عن العوامل النوعية على التأثير الصافي للقرار على دخلهم.

صيغة التكلفة الاجمالية تصبح كما يلي:

$$TC = \frac{BD}{Q} + \frac{Q}{2} iP + PD \quad ....(3)$$

حيث:

Q = كمية الطلب.

Q^* = كمية الطلب المثلى (EOQ).

D= متوسط الطلب للفترة (سنة).

B = التكلفة المرتبطة بكل طلبية تم وضعها (تكلفة إعداد الطلبية).

P = سعر الوحدة.

iP = تكلفة الاحتفاظ لكل وحدة سنويا معبرا عنها كنسبة مئوية من السعر P .

TC: التكلفة الاجمالية لكل فترة.

نلاحظ أن تكلفة الاحتفاظ هي iP بدلا من H كما هو موضح في نموذج EOQ العادي، ونظرا لأن سعر الوحدة هو عامل في تكلفة الاحتفاظ السنوية ، فإننا لا نفترض أن تكلفة الاحتفاظ ثابتة عندما يتغير السعر في كل وحدة ولكل خصم في الكمية،

وبالتالي من الشائع التعبير عن تكلفة الاحتفاظ كنسبة مئوية (i) من سعر الوحدة (P) عند تقييم تكاليف خصم الكمية.

تم تعديل صيغة (2) لمسألة خصم الكمية على النحو التالي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot D}{i \cdot P}} \quad ......(4)$$

مثال5:

شركة " س " تعمل في مجال التجهيزات الطبية، تقدمت بعرض لإدارة أحد المستشفيات بتوريدها ببعض الأجهزة، واقترحت على إدارة المستشفى الأسعار التالية:

نطاق السعر	كمية الطلبية	السعر الوحدوي (دج)
السعر الابتدائي	1 – 149	100
الخصم الأول	150 – 299	90
الخصم الثاني	من 300 فما فوق	85

تبلغ تكلفة الإعداد 300 دج لكل طلب ، ويبلغ الطلب السنوي 2400 وحدة ، وتكلفة الاحتفاظ بالمخزون السنوي قدرت كنسبة مئوية 20٪ من تكلفة الشراء، ما هي كمية الطلب التي ستقلل من إجمالي تكلفة المخزون؟

حل المثال5:

علينا تحديد الكمية التي ستقلل من إجمالي تكلفة المخزون السنوي ، ونظرا لوجود بعض الخصومات ، تتضمن هذه العملية خطوتين:

أ- نحدد جميع كميات الطلبيات الممكنة التي يمكن أن تكون الحل الأفضل.

ب- نقوم بحساب التكلفة الإجمالية لجميع كميات الطلب الأفضل الممكنة ، ويتم تحديد كمية الطلبية الأقل تكلفة.

نستخدم الخوارزمية التالية لمساعدتنا في ايجاد الكمية المثالية.

الخطوة 0: نضع: $Q^*=0$, $T^*\left(Q^*\right)=\infty$, $j=m$

الخطوة 1: حساب Q_j.

إذا كان $q_{j-1}\le Q_j\le q_j$ نذهب إلى الخطوة 3، خلاف ذلك نضع $Q_j^*=q_j$ و $T^*\left(Q^*\right)=T_j\left(q_j\right)$.

الخطوة 2: إذا كان $T_j\left(Q_j^*\right)<T^*\left(Q^*\right)$ نضع : $Q^*=Q_j$ و $T^*\left(Q^*\right)=T_j\left(Q_j^*\right)$، نضع: $J=J-1$، ثم الذهاب إلى الخطوة 1.

الخطوة 3: نضع: $T_j\left(Q_j^*\right)$ ، $T_j\left(Q_j^*\right)=P_jD+\sqrt{2BDiP_j}$ ، إذا كان: $T_j\left(Q_j^*\right)<T^*\left(Q^*\right)$ فنضع: $Q^*=Q_j^*$ $T^*\left(Q^*\right)=T_j\left(Q_j^*\right)$.

نتوقف عندئذ و نستخلص أن كمية الطلب المثلى بتكلفة إجمالية: $T^*\left(Q^*\right)$.

أما عن الترميزات المستخدمة فسنوضحها فيما يلي:

m: عدد الخصومات.

q_j: الحد الأعلى لـ jth فترة الخصم.

P_j: تكلفة الوحدة لـ jth خصم $\left[q_{j-1}\ ,\ q_j\right]$.

Q_j: كمية الطلب الاقتصادية باستخدام P_j.

Q_j^*: أفضل كمية طلب في المجال j.

Q^* : كمية الطلب المثلى على جميع الأسعار.

$T_j\left(Q\right)$: تكلفة إجمالية لـ Q وحدة في المجال j.

$T_j\left(Q_j\right)$: تكلفة إجمالية لـ EOQ وحدة في المجال j.

$T_j\left(Q_j^*\right)$: التكلفة الاجمالية الدنيا في المجال j.

$T^*\left(Q^*\right)$: التكلفة الاجمالية المثلى على جميع الأسعار.

$P_j\left(Q\right)$: تكلفة شراء Q وحدة في المجال j.

نعود لمثالنا :

الخطوة 0: نضع: $P_3=85DA$, $Q^*=0$, $T^*\left(Q^*\right)=\infty$, $j=3$

الخطوة 1:

$$Q_j = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 2400}{0.2 \cdot 85}} = 291\ U$$

نضع: $Q_3^* = 300 = q_3$ فأن:

$$T_3(q_3) = \frac{BD}{q_3} + \frac{q_3}{2} iP + P_3 D = \frac{300 \cdot 2400}{300} + 0.2(85)\frac{300}{2} + 85(2400) = 208950\ DA$$

الخطوة2:

$$T_3(300) < T^*(Q^*) \quad , \quad T_3(300) = 208950\ DA \quad , \quad J=3-1=2$$

الأن نستمر ونأخذ Q_2 مع $P_2 = 90\ DA$: $Q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 2400}{0.2 \cdot 90}} \approx 283\ U$.

نلاحظ أن $151 < 283 < 300$ فإن EOQ مسموح بها ، لذلك نذهب مباشرة إلى

الخطوة 3:

$$T_2(Q_2^*) = P_2 D + \sqrt{2 \cdot B \cdot D \cdot i \cdot P_2}$$

$$T_2(Q_2^*) = 90(2400) + \sqrt{2(300)(2400)(0.2)(90)} = 219600\ DA$$

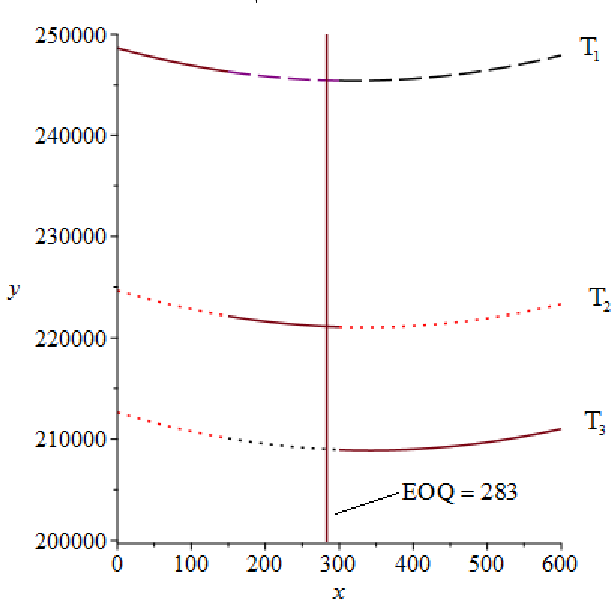
بمأن (219600 > 208950) فأن كمية الطلب المثالية هي: 300 وحدة بسعر 85 دج.

نستخدم الجدول التالي لحساب التكلفة الإجمالية لأفضل كميات الطلبيات الممكنة.

كمية الطلب	السعر الوحدوي	تكلفة الاعداد السنوية	تكلفة الاحتفاظ السنوية	تكلفة الانتاج السنوية	التكلفة الاجمالية السنوية
283	90	2544,17	2547	216000	221091,17
300	85	2400	2550	204000	208950

نوضح كل ما سبق ذكره في الشكل البياني التالي:

الشكل (13-4): تكاليف المخزون بوجود خصم



ثالثا: نموذج كمية الإنتاج الاقتصادية : Economic Production Quantity Model

في نموذج المخزون السابق، افترضنا أنه تم استلام طلبية المخزون بالكامل في وقت واحد، ومع ذلك هناك أوقات قد تتلقى فيها الشركة مخزونها خلال فترة زمنية تتطلب مثل هذه الحالات نموذجا مختلفا لا يتطلب افتراض الاستلام الفوري.

في هذا النموذج، يتم تخفيض الافتراض بأن جميع الوحدات المطلوبة تصل في نفس الوقت ، ويتم استبدالها بافتراض أن الوحدات تصل إلى معدل منتظم P خلال فترة زمنية، هذا النموذج مفيد بشكل خاص في المواقف التي يتم فيها إنتاج الوحدات داخل المصنع ويتم تخزينها لتوفير طلب منتظم.

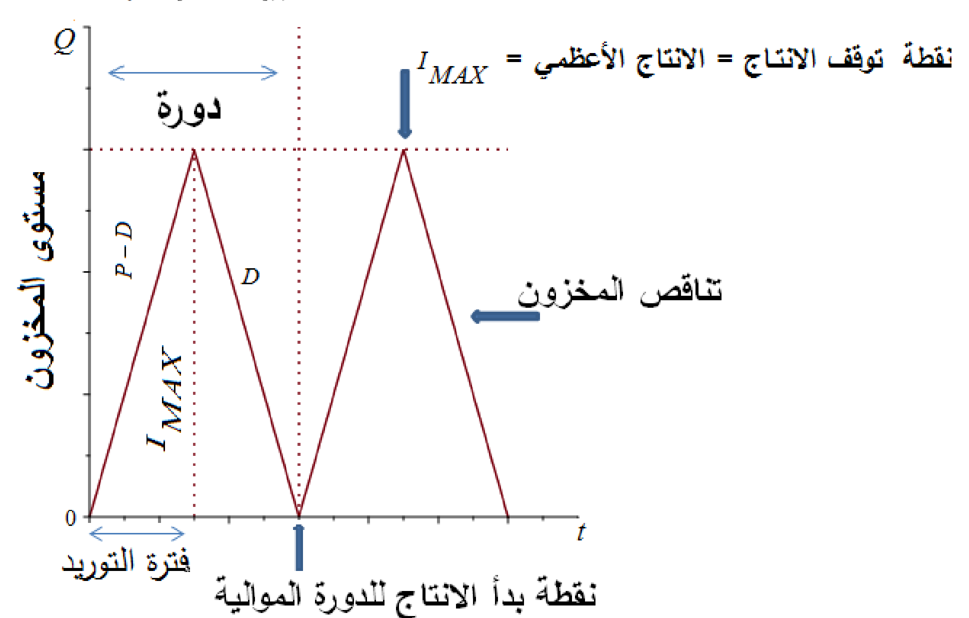
الشرط الأول لتشكيل مخزون هو أن يكون معدل العرض P أعلى من الطلب D خلال فترة الإنتاج أو العرض، خلال فترة التوريد يتم تجديد المخزون بمعدل وحدات P لكل فترة ويتم استهلاكه بمعدل وحدات D لكل فترة.

وبالتالي في هذه الفترة يتراكم المخزون بمعدل (P –D) وحدات لكل فترة، يظهر التمثيل البياني لهذا النظام في الشكل (5-13) ، معلمة التصميم لهذا النظام هي مرة أخرى كمية الطلبية ، ولكن هنا الحد الأقصى لمستوى المخزون وكمية الطلبية ليس متماثلين، والسبب هو أن الطلبية تستغرق بعض الوقت لاستلام جميع وحدات الكمية المطلوبة وخلال هذا الوقت يتم استهلاك بعض الوحدات.

تحديد هذا النظام هو تحديد فترة التوريد بدلا من كمية الطلبية، معرفة معدل التوريد وفترة التوريد يمكن تحديد كمية الطلبية.

الشكل (5-13):نموذج كمية الإنتاج الاقتصادية مع كود Maple

```
plots :- display( [ plot( [ x ], x = 0 ..3, y = 0 ..4), plot( [ - x + 6 ], x = 3 ..6, y = 0 ..4) ], plot( [6, x, x = 0 ..4 ], linestyle = [dot, dash]),
    plot( [3, x, x = 0 ..3], linestyle = [dot, dash]), [ plot( [ x -6 ], x = 6 ..9, y = 0 ..4), plot( [ - x + 12 ], x = 9 ..14, y = 0 ..4) ],
    plot( [3 ], x = 0 ..12, linestyle = [dot, dash]) )
```



شرح مستوى المخزون من خلال هذا الشكل:

يتكون المخزون في هذه الحالة بتراكم الفارق بين الانتاج والطلب (P–D) ، منطقيا إذا كان $P > D$ أي الانتاج أكبر من الطلب فأن المخزون يتزايد تدريجيا مع تزايد الزمن إلى أن يصل إلى أعلى مستوى (نقطة توقف الانتاج)، في حين يستمر الطلب على

الكميات المنتجة المخزنة إلى غاية وصول المخزون إلى أدنى مستوياته حينئذ يشرع الانتاج مرة أخرى للتزايد ويتزايد معه المخزون وهكذا دواليك.

صياغة النموذج

يمكن صياغة هذه المسألة بشكل مشابه جدا للنموذج الأساسي(EOQ)، الاختلاف الوحيد هنا هو أن متوسط مستوى المخزون ليس نصف كمية الطلبية نظرا لأن النظام لا يزال خطيا والحد الأدنى للمخزون هو صفر ، فإن متوسط المخزون هو:

متوسط المخزون= (المخزون الأعظمي (I_{MAX}) + أدنى مخزون(I_{MIN}))/2

$$I_{avg} = \frac{I_{Max} + I_{Min}}{2} ....(1)$$

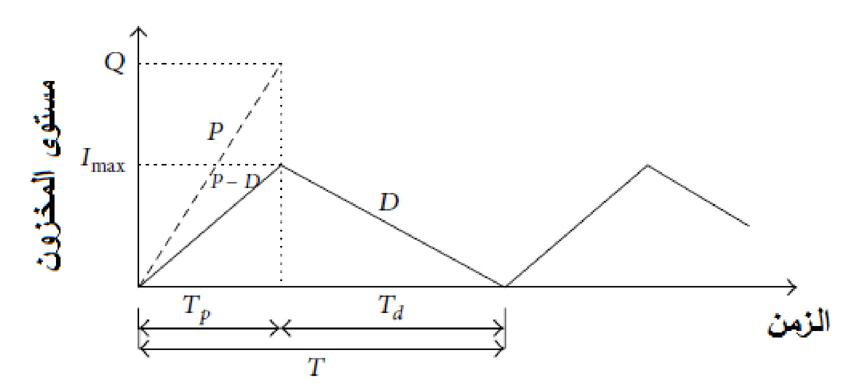
ثم إذا تمكنا من تحديد الحد الأقصى للمخزون من حيث كمية الطلبية ، فيمكن ايجاد متوسط تكلفة نظام المخزون كدالة لكمية الطلبية ، يتم حساب الحد الأقصى للمخزون على النحو التالي:

لتكن T ، T_p ، T_d تمثل طول الفترة في الدورة ، طول فترة الانتاج في الدورة، طول فترة الطلب فقط في الدورة على التوالي، نظرا لأن كمية الطلب هي Q ومعدل الانتاج هو p، و d معدل الطلب(الاحتياج اليومي) إذن:

$$T = \frac{Q}{d} \ , \ T_p = \frac{Q}{p} \ , \ T_d = \left(\frac{Q}{d} - \frac{Q}{p}\right)$$

ملاحظة : $\frac{D}{P} = \frac{d}{p}$

نوضح هذه الفترات في الشكل التالي :



خلال فترة التوريد هذه يتم زيادة مستوى المخزون بمقدار (P– D) وحدات لكل وحدة زمنية، ونظرا لأنه من المفترض أن يبدأ الانتاج في الزيادة عندما يكون مستوى المخزون صفرا، فإن الحد الأقصى لمستوى المخزون يساوي التراكم خلال هذه الفترة، إذن:

$$I_{Max} = (p-d)T_p = (p-d)\frac{Q}{p} = Q\left(1-\frac{d}{p}\right) ....(2)$$

ثم يتم إعطاء متوسط المخزون (I_{avg}) من الصيغتين (1) و (2)، حيث:

$$I_{avg} = \frac{I_{Max}}{2} = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right)$$

نتيجة لذلك، فإن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون هي:

$$\frac{HQ}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right)$$

تكلفة إعداد الطلبية هي نفسها كما كانت من قبل، وهكذا فأن التكلفة الاجمالية هي:

$$TC = \frac{HQ}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right) + \frac{BD}{Q} ....(3)$$

كما ذكرنا سابقا، عند اشتقاق المعادلة (3) ومساواتها للصفر، نحصل على أفضل قيمة لـ Q، والتي تعطى على النحو التالي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2BD}{H\left(1-\frac{d}{p}\right)}} \quad ....(4)$$

ملاحظات: عند استخدام المعادلة (4) نلاحظ ما يلي:

- إذا كانت P أقل من D ، فإن الحد $\left(1-\frac{d}{p}\right)$ يصبح سالبا، ينتج عن ذلك Q^* وهو الجذر التربيعي لقيمة سالبة، هذا بسبب عدم كفاية العرض كما ذكرنا سابقا ، لتكوين مخزون ، يجب أن يكون معدل الإنتاج أعلى من معدل الاستهلاك.
- يجب عدم الخلط بين عدد الوحدات المنتجة وعدد الوحدات المستهلكة على مدى فترة طويلة وبين معدل الإنتاج ومعدل الاستهلاك.

مثال:

تنتج شركة مختصة بالتجهيزات الرياضية 500000 كرة سلة من الطراز العالمي لكل من الأسواق المحلية والدولية بمعدل 4000 كرة في اليوم، يتم تصنيع كرات السلة بشكل منتظم على مدار العام، تكلفة الاحتفاظ بالمخزون 200 دج لكل كرة ، وتكلفة الإعداد لتشغيل الإنتاج 2500 دج ، تعمل وحدة التصنيع لمدة 250 يوما في السنة .

المطلوب: ايجاد:

1- حجم التشغيل الأمثل ؟
2- التكلفة السنوية الإجمالية الدنيا للاحتفاظ بالمخزون وتكلفة الإعداد؟
3- طول الفترة في الدورة ، طول فترة الانتاج في الدورة، طول فترة الطلب فقط في الدورة ؟

حل المثال:

1- حجم التشغيل الأمثل:

$$D = 500000\ U$$
$$B = 2500\ DA$$
$$H = 200\ DA$$
$$p = 4000\ U$$

d = معدل الطلب(الاحتياج اليومي) ونحصل عليه بقسمة الطلب السنوي D على عدد أيام العمل بالسنة.

$$d=\frac{500000}{250}=2000\ U$$

إذن حجم التشغيل الأمثل يعطى كما يلي:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2BD}{H\left(1-\frac{d}{p}\right)}}=\sqrt{\frac{2\cdot2500\cdot500000}{200\left(1-\frac{2000}{4000}\right)}}=5000\ U$$

2- التكلفة السنوية الإجمالية الدنيا للاحتفاظ بالمخزون وتكلفة الإعداد تعطى كما يلي:

$$\frac{BD}{Q}=\frac{2500\cdot500000}{5000}=250000\ DA$$

$$\frac{HQ}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right)=\frac{200\cdot5000}{2}\left(1-\frac{2000}{4000}\right)=250000\ DA$$

$$TC=\frac{HQ}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right)+\frac{BD}{Q}=250000+250000=500000\ DA$$

3- طول الفترة في الدورة ، طول فترة الانتاج في الدورة، طول فترة الطلب فقط في الدورة تعطى كالاتي:

$$T=\frac{Q}{d}=\frac{5000}{2000}=2.5\text{ days}\ \ ,\ \ T_p=\frac{Q}{p}=\frac{5000}{4000}=1.25\text{ days}$$

$$T_d=\left(\frac{Q}{d}-\frac{Q}{p}\right)=(2.5-1.25)=1.25\text{ days}$$

13-4-2- النموذج الاحتمالي:

في جميع النماذج التي تمت دراستها في الفقرات السابقة افترضت ثبات ومعلومية الطلب ، أيضا كان من المفترض أن تصل الوحدات المطلوبة بالضبط في الوقت المتوقع، لكن قضت هذه الافتراضات على حالات عدم اليقين وسمحت بحلول بسيطة إلى حد ما لتصميم أنظمة المخزون، ومع ذلك توجد حالات عدم اليقين في الواقع

العملي، فقلة قليلة من الشركات المصنعة يمكنها الادعاء بأنهم يعرفون بالضبط ما سيكون مطلبهم، ونادرا ما يمكنهم التأكد من قيام المورد بتسليم الكميات المطلوبة في الوقت المحدد بالضبط، وبالتالي قد يؤدي تطبيق النماذج الحتمية إلى بعض النتائج غير المرغوب فيها من الناحية الواقعية ، لا تصل الطلبيات الجديدة بالضرورة فقط عند استخدام العنصر الأخير في المخزون، لنأخذ مثالا: نفترض أن أحد مراكز خدمات ما بعد البيع الخاصة بالشاحنات، يخزن بطاريات شحن، يوميا يستقبل هذا المركز متوسط 20 شاحنة ، نفترض أن هذا المركز قد استخدم نموذجا محددا لمراقبة المخزون وطلب 200 بطارية كل 20 يوم أيضا ، كذلك لنفترض أن فترة التوريد هي 3 أيام ، مما ينتج عنه نقطة إعادة الطلب 60 بطارية، لنفترض ذات يوم أن مسؤول المخزن لاحظ أنه لم يتبق سوى 60 بطارية وطلب شحنة جديدة، إذا كان الطلب حتميا وهو بالضبط 20 بطارية في اليوم ، فلن يواجه أي مشكلة أثناء الانتظار 3 أيام من أجل الوصول، ستكون بطارياته الستون كافية لهذه الأيام الثلاثة، ومع ذلك فإن الطلب عادة لا يكون حتميا خلال هذه الأيام الثلاثة ، يمكن أن يكون إجمالي عدد البطاريات المطلوبة 80 أو 60 أو 40 أو أي عدد أخر، إذا كان الطلب على هذه الأيام الثلاثة هو 40 ، فلا توجد مشكلة ، ولكن إذا كان 80 أو أي شيء أكثر من 60 ، فلن يكون لدى متجر الخدمة بطاريات كافية لتلبية الطلب، في هذه الحالة سيكون مركز الخدمة غير متوفر لبعض الوقت، أو لا توجد وحدة متاحة لتلبية كل أو جزء من الطلب.

أولا : مخزون الأمان

في مثال متجر خدمة ما بعد البيع الخاص ببطاريات الشاحنات ، نفترض أن المتجر قد طلب شحنة جديدة في الوقت الذي كان فيه 80 وحدة في المخزن بدلا من 60 وحدة، ثم تم إعداده لتلبية طلب يصل إلى 80 وحدة خلال فترة التوريد، من ناحية أخرى إذا كان الطلب قد اتبع النمط المعتاد وهو 20 في اليوم ، في نهاية فترة التوريد عندما كان من المقرر وصول الشحنة الجديدة ، كان من الممكن أن تظل 20 بطارية في

المخزون، يوجد أيضا احتمال أن يكون الطلب أقل من الطلب المتوقع، قد ينتج عن هذا ترك 40 وحدة في المخزون عند وصول الشحنة الجديدة.

للتعامل مع حالات عدم اليقين، سنفترض أن الطلب متغير عشوائي بمتوسط 60 وحدة لفترة زمنية، إذا قررنا نقطة إعادة الطلب البالغة 80 وحدة، فإن الوحدات المتبقية في المخزون عند وصول الشحنة الجديدة ستكون أيضا متغيرا عشوائيا بمتوسط 20 ، تسمى هذه الكمية البالغة 20 وحدة مخزون الأمان ، تكمن أهمية مخزون الأمان في أنه يوضح عدد الوحدات الإضافية التي يجب أن نحتفظ بها بالإضافة إلى الطلب المتوقع للتعامل مع حالات عدم اليقين، مخزون الأمان 20 وحدة للمثال أعلاه قد لا تحل جميع المشاكل التي يواجهها هذا المتجر ، على سبيل المثال ماذا يحدث إذا أصبح الطلب خلال فترة التوريد 100 ؟ قد يقترح المسؤول أن مخزون الأمان المكون من 40 بطارية أفضل لأنها يمكن أن تستجيب لشكوك أكبر في أقصى الحدود ، للقضاء على أي فرصة لنفاد المخزون ، قد يبدو أن مخزون أمان كبير سيكون ضروريا، على الرغم من أن المخزون الاحتياطي الكبير قد يقضي على خطر نفاد المخزون ، إلا أنه يثير مشكلة أخرى، يضيف مخزون الأمان الكبير إلى تكاليف الاحتفاظ بالمخزون، يتم تقييد رأس المال الذي يتم إنفاقه على العناصر الموجودة في المخزون وزيادة تكاليف التأمين والضرائب على المقتنيات، هذا يقترح أنه لا ينبغي زيادة حجم المخزون الاحتياطي إلى أجل غير مسمى للقضاء على مخاطر نفاد المخزون، بدلا من ذلك ، يتعين على المسؤول أن يقيم توازنا بين الخسائر الناجمة عن نفاد المخزون وتكلفة الاحتفاظ بالوحدات الإضافية في المخزون.

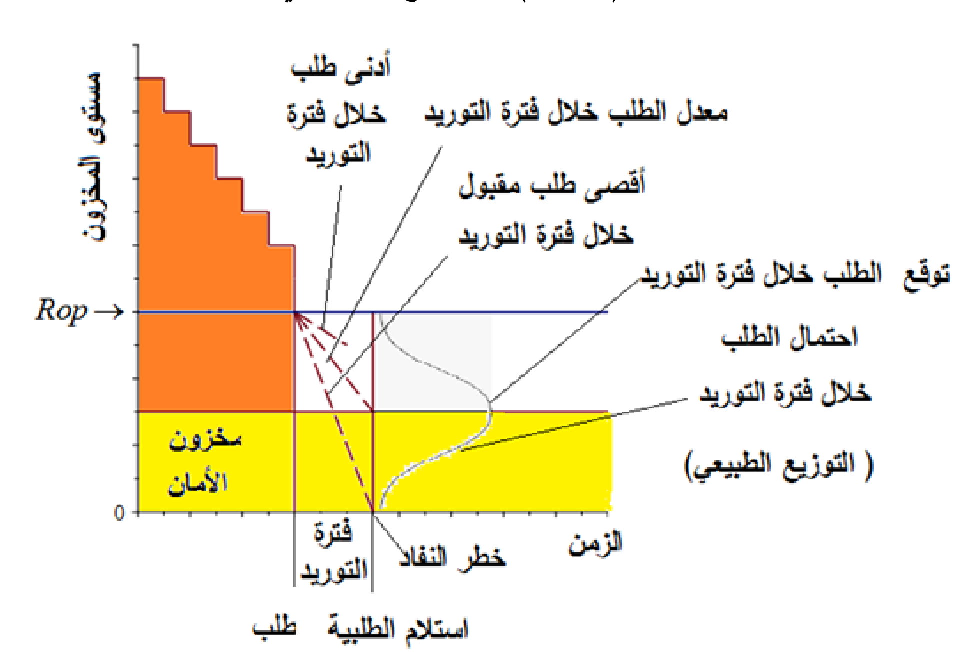
القيمة المثلى لمخزون الأمان هي القيمة التي يكون مجموع تكلفة عدم توفرها وتكلفة الاحتفاظ بمخزون الأمان هو الحد الأدنى في أنظمة المخزون العشوائية ، يكون الطلب أو فترة التوريد أو كلاهما عشوائيا، وبالتالي سيكون العجز متغيرا عشوائيا أيضا، ثم لتقييم تكاليف العجز ، يجب تقديم بعض المعلومات حول التوزيع الاحتمالي للطلب ، وخاصة الطلب خلال فترة التوريد .

تعريف مخزون الأمان:

هو المخزون المحتفظ به بما يزيد عن الطلب المتوقع بسبب معدل الطلب المتغير (و/ أو) فترة التوريد المتغيرة.

يوضح الشكل التالي كيف يمكن لمخزون الأمان أن يقلل من مخاطر المخزون أثناء فترة التوريد (تم باستخدام برنامج Maple).

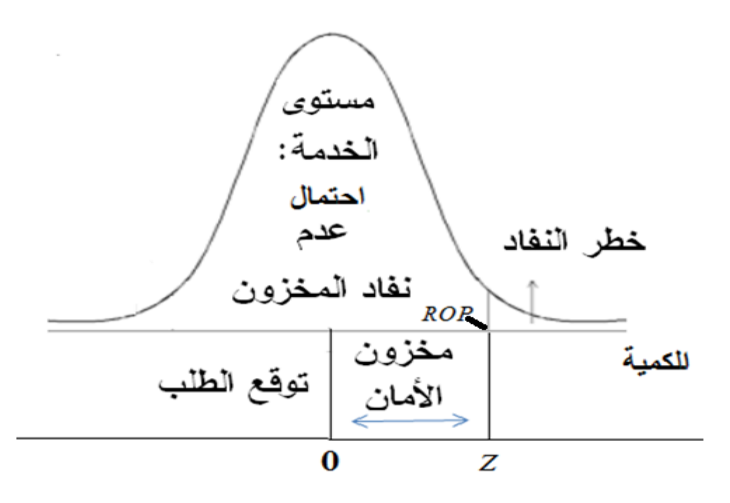
الشكل (13-6): النموذج الاحتمالي



مستوى الخدمة (SL): احتمال ألا يتجاوز الطلب العرض خلال فترة التوريد (أي احتمال عدم نفاد المخزون)، لذا فإن خطر نفاد المخزون هو $1-SL$.

نوضح ذلك في الشكل التالي:

الشكل (13-7): مستوى الخدمة (SL)



ثانيا: التوزيع الاحتمالي للطلب Probability Distribution for Demand :

في هذا النوع نفترض أن الطلب غير معروف لكن التوزيع الاحتمالي للطلب معروف، من خلال دراسة خصائص التوزيعات الاحتمالية المطبقة في إدارة المؤسسة، سنحدد السياسات المثلى التي ينبغي للمؤسسة إتباعها من أجل تسيير أمثل لمخزونها.

أ- **المتغير العشوائي للطلب Random Variable for Demand(X)** : هذا المتغير يمثل الطلب لفترة زمنية معينة، يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار الفترة التي تم تعريف المتغير العشوائي فيها لأنها تختلف بين النماذج .

ب- **دالة التوزيع الاحتمالية المتقطعة للطلب P(x) Discrete Demand Probability Distribution Function:** عندما يفترض أن يكون الطلب متغيرا عشوائيا متقطعا، تعطي P(x) احتمال أن يساوي الطلب x.

ت- **التابع التوزيعي المتقطع F(b) Discrete Cumulative Distribution Function)):** احتمال أن يكون الطلب أقل من أو يساوي b هو $F(b)$ عندما يكون الطلب متغير عشوائي متقطع هو:

$$F(b)=\sum_{x=0}^{b}P(x).$$

ث- تابع الكثافة الاحتمالي للطلب (متغير عشوائي مستمر) $f(x)$
Continuous Demand Probability Density Function: عندما يفترض أن الطلب مستمر ، فإن $f(x)$ هي دالة الكثافة الخاصة به، احتمال أن يكون الطلب بين a و b هو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

بمأن الطلب موجب ، لذا فإن $f(x)$ تساوي صفر للقيم السالبة.

ج- التابع التوزيعي المستمر F (b) Continuous Cumulative Distribution Function :

احتمال أن يكون الطلب أقل من أو يساوي b عندما يكون الطلب :

$$F(b) = \int_0^b f(x)\, dx$$

ح- دالة التوزيع الطبيعي المعياري $\Phi(x)$ Standard Normal Distribution Function:

إذا كان المتغير العشوائي المستمر (x) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2) أي $X \mapsto N(\mu, \sigma^2)$ ، فأن المتغير العشوائي t يمكن الحصول عليه من خلال إجراء التحويل الآتي: $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$، وعليه فدالة الكثافة الاحتمالية تعطى بالشكل الآتي:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} & -\infty < t < +\infty \\ 0 / w & \end{cases}$$

ثالثا: نظام الحد الأقصى – الحد الأدنى مع مخزون الأمان:

يتم إضافة مخزون الأمان إلى نظام المخزون الأقصى – الأدنى البسيط، يظهر الشكل العام لهذا النموذج في الشكل (13-6) ، في هذا الشكل عند وصول الوحدات

المطلوبة لا يزال هناك عدد من الوحدات يساوي مخزون الأمان SS المتبقي في المخزن، بالطبع كما أشرنا سابقا نظرا للطلب العشوائي، فإن عدد الوحدات المتبقية عند وصول الطلبية الجديدة هو متغير عشوائي، عند استلام وحدات جديدة يتم إضافتها إلى مخزون الأمان هذا، ونتيجة لذلك يتم تكوين مستوى المخزون إلى الحد الأقصى.

$$I_{\max} = SS + Q$$

من أجل التبسيط ، يفترض أن الانخفاض في مستوى المخزون يتبع مسارا خطيا حتى يصل إلى الحد الأدنى لمستوى $I_{\min} = SS$ حيث يتم استلام طلب أخر على الرغم من أنه قد يبدو من غير المعقول افتراض نمط انخفاض خطي عندما يكون الطلب عشوائيا ، إلا أن هذا الافتراض على المدى الطويل لا يؤثر بشكل كبير على دقة تقديرات تكلفة الاحتفاظ.

يحدث التأثير الرئيسي للطلب العشوائي على التكلفة خلال فترة التوريد حيث يوجد احتمال وجود عجز.

بعد تحديد الحد الأقصى والحد الأدنى لمستويات المخزون، يمكننا تحديد دالة التكلفة الإجمالية على أنها:

إجمالي تكلفة المخزون (الفترة) = تكلفة الاحتفاظ بالمخزون (الفترة) + تكلفة الطلب (الفترة) + تكلفة النقص (الفترة).

$$TC = H \cdot \left(\frac{Q}{2} + SS \right) + \frac{BD}{Q} + SC \; ....(1)$$

حيث SC هي تكلفة العجز لكل فترة ، يمكن استخدام الصيغة (1) لتدنية التكلفة من خلال إيجاد القيم المثلى لمتغيرات القرار: Q و SS بشرط أن نتمكن من تحديد تكلفة النقص كدالة لهذين المتغيرين، هذا ممكن إذا علمنا بالتوزيع الاحتمالي للطلب العشوائي خلال فترة التوريد، يتم النظر في الطلب خلال فترة التوريد لأن هذا هو الزمن الوحيد الذي توجد خلاله إمكانية العجز ، حساب تكلفة العجز باستخدام هذا التوزيع على النحو التالي:

نفرض أن الطلب خلال فترة التوريد متغير عشوائي X دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ، ليكن D و D_L القيمتان المتوقعتان للطلب لكل فترة والطلب خلال فترة التوريد على التوالي، يحدث العجز إذا كان الطلب خلال فترة التوريد أكبر من نقطة إعادة الطلب (المشار إليها بـ ROP)، نقطة إعادة الطلب في هذه الحالة ROP تحسب كما يلي:

ROP = القيمة المتوقعة للطلب خلال فترة التوريد + مخزون الأمان.

القيمة المتوقعة للطلب خلال فترة التوريد تحسب كما يلي:

$$D_L = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

إذن نقطة إعادة الطلب: $ROP = D_L + SS$..............(2) .

المرة الوحيدة التي قد يكون لدينا عجز فيها هي عندما يتجاوز الطلب خلال فترة التوريد نقطة إعادة الطلب، هذا هو:

$$\left.\begin{matrix} 0 & \text{إذا كان} & X \leq ROP \\ S\cdot E(US) & \text{إذا كان} & X > ROP \end{matrix}\right\} \quad (3)....................$$

S : تكلفة العجز ، US: عدد وحدات العجز.

نلاحظ أن هذا الافتراض يعني أن تكلفة العجز لكل عنصر مستقلة عن مدة العجز ، بمعنى أخر إذا كان العنصر قصيرا خلال فترة التوريد ، فستكون تكلفة العجز S سواء حدث هذا العجز قبل يوم واحد من وصول الشحنة الجديدة أو 10 أيام، ومع ذلك فإن الطلب الذي يتجاوز نقطة إعادة الطلب يشمل جميع قيم الطلب الأكبر من ROP.

الأن إذا كان الطلب هو x ونقطة إعادة الطلب R ، فسيكون العجز متغيرا عشوائيا يمكن إظهاره بواسطة (x − R). القيمة المتوقعة لهذا المتغير العشوائي هي:

$$E(US) = \int_{R}^{+\infty} (x-R)\, f(x)\, dx$$

$$SC/LT = S\int_{R}^{+\infty} (x-R)\, f(x)\, dx$$

كما تطرقنا سابقا هناك أوقات توريد $\frac{D}{Q}$ لكل فترة زمنية:

$$SC=\frac{D}{Q}\int_{R}^{+\infty}(x-R)\,f(x)\,dx........(4)$$

هذه التكلفة هي دالة لـ Q و SS فقط، S معلوم والحد داخل التكامل سيتم ذكره من حيث حدود التكامل بين ∞ و R = DL + SS، ثم ستكون تكلفة المخزون الإجمالية من الصيغتين (1) و (4).

$$TC=H\cdot\left(\frac{Q}{2}+SS\right)+\frac{BD}{Q}+\frac{D}{Q}\int_{D_L+SS}^{+\infty}(x-R)\,f(x)\,dx........(5)$$

ملاحظة: عندما يكون الطلب متقطعا تتغير دالة التكلفة الإجمالية إلى:

$$TC=H\cdot\left(\frac{Q}{2}+SS\right)+\frac{BD}{Q}+\frac{D}{Q}\sum_{x_i>R}(x_i-R)\,p(x_i)........(6)$$

يمكن إعادة صياغة فرضيات النموذج كما يلي:

1- الطلب اليومي متغيرات عشوائي.

2- الطلب اليومي مستقل عن فترة التوريد.

يعتمد مقدار مخزون الأمان على:

1- مستوى الخدمة المطلوب $1-\alpha$.

2- (معدل) الطلب اليومي D_i متغير عشوائي لـ i يوم ، وبالتالي متوسطه وانحرافه المعياري يعطي كالتالي: (μ_D,σ_D).

3- فترة التوريد L متغير عشوائي ، وبالتالي متوسطه وانحرافه المعياري يعطي كالتالي: (μ_L,σ_L).

لذا فإن الطلب خلال فترة التوريد هو متغير عشوائي جديد بالوحدة التي تساوي عدد العناصر: $D_L=\sum_{i=1}^{L}D_i=D_1+D_2+.....+D_L$.

باستخدام خواص التوقع والتباين المركب نجد:

$$E\left(D_L\right)=E\left[\sum_{i=1}^{L} D_i\right]=\mu_L \mu_D$$

$$V\left(D_L\right)=V\left[\sum_{i=1}^{L} D_i\right]=\mu_L \sigma_D^2+\mu_D^2 \sigma_L^2$$

نفرض أن D_L يتوزع توزيع طبيعي $D_L \sim N\left(E\left(D_L\right), \sqrt{V\left(D_L\right)}\right)$.

ثم يجب اختيار ROP بحيث يكون احتمال عدم نفاد المخزون على الأقل $1-\alpha$، أي:

$$P\left(D_L \leq ROP\right) \geq 1-\alpha$$

حساب ROPيعطى كما يلي:

$$ROP=E\left(D_L\right)+Z_\alpha \cdot \sqrt{V\left(D_L\right)}=\mu_L \mu_D+Z_\alpha \cdot \sqrt{\mu_L \sigma_D^2+\mu_D^2 \sigma_L^2}$$

مثال6:

يستخدم أحد مطاعم العاصمة أسبوعيا ما معدله 40 جرة من الصلصة العالية الجودة ، وبانحراف معياري بمقدار 10 جرات، صاحب المطعم على استعداد لقبول ما لا يزيد عن 5% من مخاطر المخزون خلال فترة التوريد وهي أسبوعين، نفترض أن توزيع الاحتياج اليومي يتوزع طبيعيا ، المطلوب : حساب ROP ؟

حل المثال6:

$$\mu_D=40 \quad , \quad \mu_L=2 \quad , \quad \sigma_D=10 \quad , \quad \sigma_L=0$$
$$\alpha=0.05 \Rightarrow Z_\alpha=1.645$$

$$ROP=\mu_L \mu_D+Z_\alpha \cdot \sqrt{\mu_L \sigma_D^2+\mu_D^2 \sigma_L^2}=2 \cdot 40+1.645 \sqrt{2 \cdot(10)^2} \approx 103 \text{ ج}$$

تقريبا نقطة إعادة الطلب هي 103 جرة.

ملاحظة1: في المثال السابق كان الطلب متغير وفترة التوريد ثابتة لذا كان $\sigma_L^2=0$ ، أما في حالة العكس الطلب ثابت و فترة التوريد متغيرة نضع $\sigma_D^2=0$.

ملاحظة2: لحساب $Z_\alpha=1.645$ تم استخدام جدول التوزيع الطبيعي (أنظر إلى **الصفحة: 236**)، نلخص بعض القيم في الجدول التالي:

خطر النفاد	%30	%20	%10	%5	%2.5	%1	%0.1
Z المناظرة	0.52	0.84	1.28	1.645	1.96	2.33	3.09

مثلا لو نأخذ $\alpha = 0.025$ فقيمة Z المناظرة تكون على النحو الاتي:

نستخدم الجدول الثاني للتوزيع الطبيعي (نستغل خاصية التماثل للتوزيع الطبيعي):

$0.5 - 0.025 = 0.4750$ ، نبحث عن القيمة المناظرة لـ 0.4750 من جدول التوزيع الطبيعي نجدها: $Z_{\alpha=0.025} = 1.96$.

مثال7:

فندق شهير مكون من 300 غرفة ، يحتاج المديرون إلى مراقبة جميع عناصر خدمة الغرف عن كثب بما في ذلك قطع الصابون (الصغيرة الحجم)، يبلغ معدل الطلب اليومي على الصابون 200 قطعة مع انحراف معياري قدره 40 قطعة تكلفة إعداد الطلبية هي 20 دج وتكلفة الاحتفاظ بالمخزون 2 دج/ للقطعة في السنة ، فترة التوريد هي 15 أيام، مع انحراف معياري لـ 3 أيام، النزل مفتوح 365 يوما في السنة.

المطلوب:

1- ما هي كمية الطلب الاقتصادية لقطعة الصابون؟

2- ما هي نقطة إعادة الطلب لقطعة الصابون إذا أرادت الإدارة الحصول على مستوى خدمة 97.5 % في الدورة ؟

1- ما هي التكلفة الإجمالية السنوية لقطعة الصابون ، بافتراض استخدام نظام Q؟

حل المثال7:

1- **الطلب السنوي:** D = 200 × 365 = 73000 قطعة في السنة.

B = 20 دج ، فحساب **EOQ** يكون على النحو الاتي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot D}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 73000}{2}} \simeq 382\ U$$

2- حساب نقطة إعادة الطلب:

$$\mu_D = 200\ U,\ \sigma_D = 40\ ,\ L = 15\ ,\ \sigma_L = 3$$

$$\alpha = 2.5\% \Rightarrow Z_\alpha = 1.96$$

$$ROP = \mu_L \mu_D + Z_\alpha \cdot \sqrt{\mu_L \sigma_D^2 + \mu_D^2 \sigma_L^2}$$

$$ROP = 15 \times 200 + 1.96\sqrt{15 \cdot 40^2 + 200 \cdot 3^2} \approx 3315\ U$$

$$SS = 3315 - 3000 = 315\ U$$

3- حساب التكلفة الإجمالية السنوية لقطع الصابون (نظام Q):

$$\text{T}C = \frac{BD}{Q^*} + \frac{H.Q^*}{2} + H \cdot SS = \frac{20 \times 73000}{382} + \frac{2 \times 382}{2} + 2 \times 315 = 4834\ DA$$

رابعا: نموذج مخزون الأمان الفترة الواحدة A single period inventory model هو سيناريو أعمال تواجهه الشركات التي تطلب عناصر موسمية أو لمرة واحدة، هناك فرصة واحدة فقط للحصول على الكمية الصحيحة عند الطلب ، حيث أن المنتج ليس له قيمة بعد الوقت المطلوب، هناك تكاليف للطلب أكثر من اللازم أو العكس ، ويجب على مديري الشركة محاولة تصحيح الطلبية في المرة الأولى لتقليل فرصة الخسارة .

أ- مسألة موزع الجرائد:

غالبا ما يتم شرح نموذج مخزون الفترة الواحدة بمثال " مسألة موزع الجرائد " ، يجب على هذا البائع أن يطلب الصحف في اليوم السابق، لديه فرصة واحدة فقط للطلب لأن الصحف لها قيمة فقط في يوم نشرها ، في اليوم التالي لا تساوي شيئا، إذا طلب الكثير فسيتعين عليه استيعاب فقدان الصحف غير المباعة ، وإذا طلب القليل جدا فسيخسر الأرباح ويضايق الزبائن، إن الحصول على كمية الطلبية الصحيحة هو الطريقة التي يحقق بها بائع الجرائد أكبر قدر من الأرباح.

ب- تكلفة طلب الكثير:

يمكن أن يؤدي تخزين الكثير من العناصر الموسمية إلى خسائر كبيرة للشركة، في حالة حلويات الأعياد (الموسمية) على سبيل المثال ، تذهب المبيعات إلى الصفر في اليوم التالي لهذا العيد لدى الشركة خيار تدمير المخزون المتبقي ، أو بيع بعضها بخصومات كبيرة أو تخزينها حتى العيد القادم، يكلف الخيار الأخير تكلفة اضافية للتخزين.

خامسا: نهج التحليل الهامشيMarginal Analysis:

نهج التحليل الهامشي هو إحدى الطرق لإيجاد كمية الطلبية التي لديها أفضل فرصة لتكون صحيحة، تتم مقارنة تكلفة طلب وحدة أخرى بالربح المكتسب من طلب وحدة أخرى، يستخدم التحليل الكمي لتحديد كمية الطلبية الاقتصادية بناء على الطلب المتوقع ، غالبا ما تستخدم الطرق الاحصائية للتوصل إلى كمية الطلبية الصحيحة.

فرضيات هذا النموذج كما يلي:

الطلب X هو متغير عشوائي كثافته الاحتمالية $f(x)$ وتابعه التوزيعي $F(x)$.

كمية الطلبية Q وحدة لكل طلب.

سعر الشراء هو w لكل وحدة.

سعر البيع P لكل وحدة.

سعر الاسترداد هو s.

أفق التخطيط خاص بفترة واحدة.

الهدف هو تحديد كمية الطلبية Q بحيث يتم تقليل التكلفة الإجمالية المتوقعة ، بما في ذلك إجمالي العجز على المدى الطويل والتكاليف الزائدة (انظر الفقرات أدناه)، هناك نوعان من القوى الدافعة و المتعارضة في هذا النموذج.

- تكلفة العجز وهي خسارة الفرصة لتقليل الطلب (نعبر عنها بالكمية أو بالوحدة النقدية)($Q < X$):

C_s (تكلفة العجز المتوقع)= سعر البيع لكل وحدة – سعر الشراء لكل وحدة ($C_s = p - w$).

- التكلفة الزائدة (الفرق بين تكلفة الشراء والاسترداد)، وهي الخسارة في تقدير الطلب (نعبر عنها بالكمية أو بالوحدة النقدية) ($Q > X$):

C_e (تكلفة الزائدة المتوقعة)= سعر الشراء لكل وحدة – سعر الاسترداد لكل وحدة = ($C_e = w - s$).

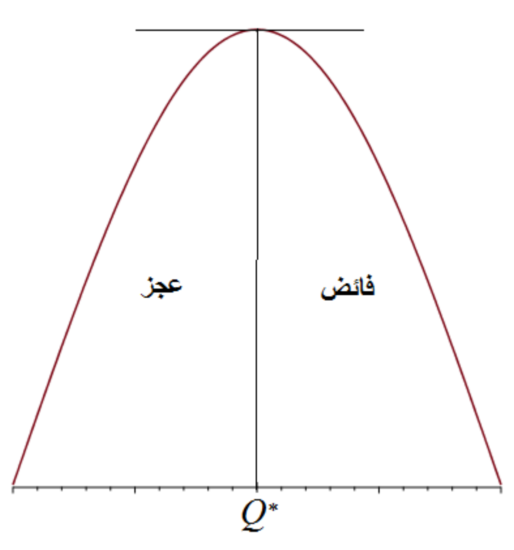
يعطى نموذج التكلفة الإجمالية المتوقعة كالتالي:

$$E_X(TC) = C_e \cdot E_X\left(\max(Q - X, 0)\right) + C_s \cdot E_X\left(\max(X - Q, 0)\right)$$

$$= \underbrace{C_e \int_0^Q (Q - x)\, f(x)\, dx}_{E(EC)} + \underbrace{C_s \int_Q^{+\infty} (x - Q)\, f(x)\, dx}_{E(SC)}$$

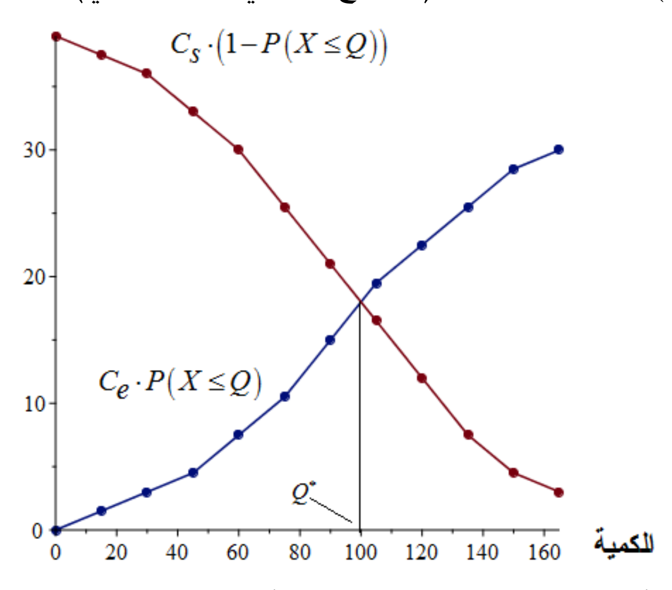
- يعتمد الحل الأمثل Q^* على توزيع الطلب الأساسي، نوضح ذلك في الشكل التالي:

الشكل (8-13): التحليل الهامشي



لدينا : $C_e \cdot P(X \leq Q)$ ، $C_s \cdot (1-P(X \leq Q))$، بافتراض التوزيع المستمر للطلب، فإذا كان:

$E(EC) < E(SC)$ فأن Q متزايدة (نوضح ذلك في الشكل التالي):



بافتراض المساواة أي: $Q^* = E(EC) = E(SC)$ فأن:

$$C_e \cdot P(X \le Q) = C_s \cdot (1 - P(X \le Q)) = C_s - C_s P(X \le Q)$$

$$\therefore (C_e + C_s) P(X \le Q) = C_s \Rightarrow P(X \le Q) = \frac{C_s}{C_s + C_e}$$

– نحدد مفهوم مستوى الخدمة (SL) ، وعادة ما يشار إليه بـ $1-\alpha$ ، لأن احتمال الطلب لن يتجاوز كمية الطلبية، أي:

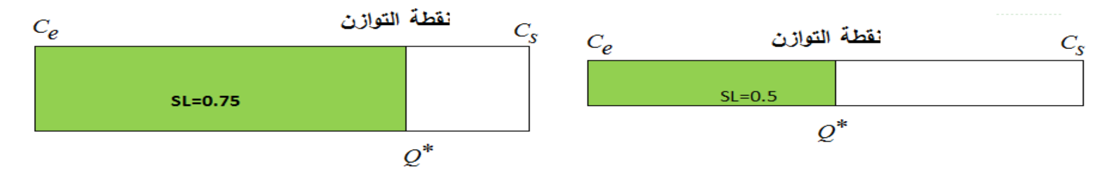
$$SL = 1 - \alpha = \frac{C_s}{C_s + C_e} = P(X \le Q)$$

$$P(X \le Q) = 0.5 \pm \phi(Q)$$

$$Q^* = Q_1 + Q\sigma$$

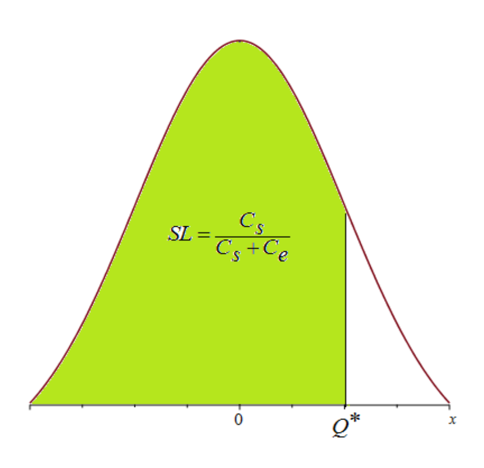
حيث Q_1 : المتوسط ، و σ : الانحراف المعياري (لمزيد من التوضيح حول هذه النقطة الملحق أنظر إلى الملحق)

توضح الأشكال التالية مستوى الخدمة لتوزيع الطلب بشكل منتظم.



ملاحظة :

عندما تكون كمية الطلبية متقطعة وليست مستمرة (وبالتالي فإن X متغير عشوائي متقطع وليس متغيرا مستمرا) ، فإن Q^* الأمثل الذي يفي بالمعادلة الأخيرة لا يتطابق عادة مع كميات الطلبية الممكنة (لأنه قد يكون عددا كسريا)، الحل هو أن نجري التقريب إلى أعلى كمية طلبية تالية (انظر الأدوات والمثال أدناه لمزيد من التوضيح).



مثال8:

يريد صاحب كشك لبيع الجرائد تحديد العدد الذي يجب تخزينه في بداية كل يوم، تتكلف الصحيفة الواحدة 15دج ، ويتم بيعها مقابل 30 دج.

يتم بيع الجريدة عادة بين الساعة 7:00 و 00 :8 صباحا، ويتم إعادة تدوير الصحف المتبقية في نهاية اليوم للحصول على دخل قدره 5 دج، كم عدد النسخ التي يجب على هذا البائع تخزينها كل صباح لتقليل التكلفة الإجمالية (أو تعظيم الربح) ، على افتراض أن الطلب في اليوم يمكن تقريبه بواسطة:

1- التوزيع الطبيعي بمتوسط 150 نسخة وانحراف معياري 10 نسخ .

2- دالة احتمال لمتغير عشوائي متقطع معرفة كما يلي:

D	100	110	150	160	170
$f(D)$	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1
$F(D)$	0.2	0.5	0.8	0.9	1

حل المثال8:

1- بواسطة التوزيع الطبيعي:

$w = 15\ DA \quad , \quad p = 30\ DA \quad , \quad s = 5\ DA$

$C_s = p - w = 30 - 15 = 15\ DA$

$C_e = w - s = 15 - 5 = 10\ DA$

$$SL = \frac{C_S}{C_S + C_e} = \frac{15}{15+10} = 0.6$$

$SL = P(X \leq Q) = 0.6 = 0.5 + \phi(Q) \Rightarrow \phi(Q) = 0.1$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي **(ص: 244)** لإيجاد Q .

$Q = 0.26$

$Q^* = Q_1 + Q\sigma = 150 + 0.26(10) = 152.6 \approx 153$

لذا فإن 60٪ من المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي يجب أن تكون على يسار مستوى التخزين الأمثل ، وبالتالي فالطلبية المثلى بواسطة التوزيع الطبيعي هي: 153 صحيفة.

تكون مخاطر المخزون إذا طلب صاحب الكشك أكثر من 153 نسخة من موزع الجريدة:

$1 - SL = 1 - 0.6 = 0.4$.

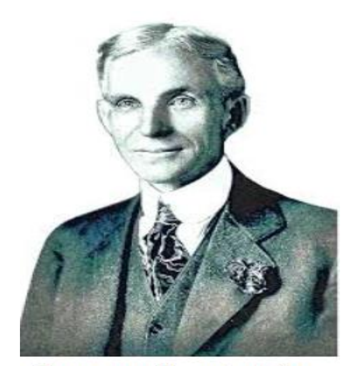
2- بواسطة التوزيع المتقطع:

نلاحظ أن $0.5 < SL < 0.8$ ، وبالتالي فالطلبية المثلى بواسطة التوزيع المتقطع هي: $Q^* = 150$.

جدول التوزيع الطبيعي

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

الأعلام المذكورة في الفصل الثالث عشر:



ويتمان هاريس (1877- 1962)
Ford Whitman Harris

الفصل الرابع عشر: المحاكاة Simulation

تمهيد:

المحاكاة هي نموذج يحاكي تشغيل نظام موجود أو مقترح، ويقدم دليلا على اتخاذ القرار من خلال القدرة على اختبار سيناريوهات مختلفة أو تغييرات عملية، يمكن استخدام المحاكاة لضبط الأداء وتحسين العملية وتحسين السلامة واختبار النظريات وتدريب الموظفين ، حيث تسمح أنظمة النمذجة العلمية للمستخدم باكتساب نظرة ثاقبة لتأثيرات الظروف المختلفة ومسارات العمل.

يمكن أيضا استخدام المحاكاة عندما يتعذر الوصول إلى النظام الحقيقي أو يكون من الخطورة جدا تقييمه أو عندما يكون النظام لا يزال في مراحل التصميم أو النظرية.

مفتاح أي محاكاة هو المعلومات المستخدمة لبناء نموذج المحاكاة وبروتوكولات التحقق والتحقق من صحة النماذج التي لا تزال قيد البحث والتنقيح ، لا سيما فيما يتعلق بمحاكاة الكمبيوتر.

عادة ما تكون عمليات المحاكاة قائمة على الكمبيوتر، باستخدام نموذج تم إنشاؤه بواسطة البرامج لتوفير الدعم لقرارات المديرين والمهندسين وكذلك لأغراض التدريب، تساعد تقنيات المحاكاة على الفهم والتجريب، حيث أن النماذج مرئية وتفاعلية.

تشمل أنظمة المحاكاة محاكاة الأحداث المنفصلة ومحاكاة العمليات والمحاكاة الديناميكية، قد تستخدم الشركات كل هذه الأنظمة عبر مستويات مختلفة من المنظمة.

14-1- مزايا المحاكاة:

هناك مجموعة من المزايا التي يمكن اكتسابها من خلال استخدام المحاكاة، نذكر منها:

14-1-1- تقليص المخاطر المالية:

المحاكاة أقل تكلفة من التجارب الواقعية، حيث تسمح لنا باختبار النظريات وتجنب الأخطاء المكلفة في الحياة الواقعية.

14-1-2- الاختبار المتكرر الدقيق:

تسمح لنا المحاكاة باختبار نظريات وابتكارات مختلفة مرة تلو الأخرى مقابل نفس الظروف بالضبط، هذا يعني أنه يمكننا اختبار ومقارنة الأفكار المختلفة بدقة دون انحراف.

14-1-3- فحص الأثار طويلة المدى:

يمكن إنشاء محاكاة للسماح لنا برؤية المستقبل من خلال النمذجة الدقيقة لتأثير سنوات من الاستخدام في بضع ثوان فقط ، مما يتيح لنا اتخاذ قرارات استثمارية مدروسة.

14-1-4- اكتساب رؤى لتحسين العملية:

لا تتحقق فوائد المحاكاة فقط في نهاية المشروع، بل يمكننا دمج التحسينات خلال العملية بأكملها عن طريق اختبار نظريات مختلفة.

14-1-5- تقييم الأحداث العشوائية:

يمكن أيضا استخدام المحاكاة لتقييم الأحداث العشوائية مثل غياب الموظفين غير المتوقع أو مشكلات في سلسلة التوريد.

على الرغم من وجود العديد من المزايا لاستخدام المحاكاة ، فإن المحاكاة لها قيود عندما يتعلق الأمر بتقييم بعض مواقف العالم الحقيقي الفعلية عند حدوثها.

بعض المسائل البسيطة يستحسن حلها بالطرق العادية فهي أفضل من استخدام طرق المحاكاة.

14-2- دور المحاكاة في دراسات بحوث العمليات:

تلعب المحاكاة في دراسات بحوث العمليات نفس الدور الذي تلعبه في الميادين التكنولوجية، ففي هذا الميدان (بحوث العمليات) يهتم القائمون بتطوير تصميم أو إجراء تشغيل لبعض الأنظمة العشوائية (نظام يتطور احتماليا بمرور الزمن)، بعض هذه الأنظمة العشوائية تشبه أمثلة سلاسل ماركوف و نظرية الطوابير، والبعض الأخر أكثر تعقيدا، فيتم تقليد أداء النظام الحقيقي باستخدام توزيعات احتمالية لتوليد أحداث مختلفة تحدث في النظام بشكل عشوائي، لذلك يقوم نموذج المحاكاة بتوليف النظام من خلال تكوينه حسب المكون وحدثا بحدث، ثم يقوم النموذج بتشغيل نظام المحاكاة للحصول على الملاحظات الإحصائية لأداء النظام الناتج عن الأحداث المختلفة التي تم إنشاؤها عشوائيا، ونظرا لأن عمليات المحاكاة تتطلب عادة إنشاء كمية كبيرة من البيانات ومعالجتها، فإن هذه التجارب الإحصائية يتم إجراؤها حتما على جهاز كمبيوتر.

عند استخدام المحاكاة كجزء من دراسة بحث عملياتي، فمن الشائع أن تكون مسبوقة ومتبعة بنفس الخطوات الموصوفة في محاكاة ظاهرة معينة مستخدمة في ميدان أخر مثلا (محاكاة قيادة الطائرة).

14-3- خطوات إجراء محاكاة:

يحتوي نموذج المحاكاة على العديد من اللبنات الأساسية نذكر منها:

1. تعريف حالة النظام (على سبيل المثال، عدد الزبائن في نظام صف الانتظار).

2. تحديد الحالات المحتملة للنظام التي يمكن أن تحدث.
3. تحديد الأحداث المحتملة (على سبيل المثال: الوصول وإتمام الخدمة في نظام الانتظار)

من شأنه أن يغير حالة النظام.
4. طريقة لتوليد الأحداث بشكل عشوائي على اختلاف أنواعها.
5. صيغة لتعريف انتقالات الحالة التي تم إنشاؤها بواسطة أنواع مختلفة من الأحداث،

تُستخدم المحاكاة عادة عندما يكون النظام العشوائي المعني معقدا للغاية بحيث لا يمكن تحليله بشكل مرضٍ بواسطة أنواع النماذج الرياضية (مثل نماذج الانتظار) الموصوفة في الفصل (12)، تتمثل إحدى نقاط القوة الرئيسية للنموذج الرياضي في أنه يجرد جوهر المسألة ويكشف عن هيكلها الأساسي، وبالتالي توفير نظرة ثاقبة لعلاقات السبب والنتيجة داخل النظام، لذلك إذا كان المصمم قادرا على بناء نموذج رياضي يمثّل تمثيلا مثاليا معقولا للمسألة وقابلا للحل، فإن هذا النهج عادة ما يكون متفوقا على المحاكاة.

ومع ذلك، فإن العديد من المسائل معقدة للغاية وبالتالي توفر المحاكاة النهج العملي الوحيد لحل هذه المسألة.

14-4- محاكاة الحدث المنفصل مقابل المحاكاة المستمرة:

هناك فئتان عريضتان من عمليات المحاكاة هما الحدث المنفصل والمحاكاة المستمرة، محاكاة الحدث المنفصل هي التي تحدث فيها تغييرات في حالة النظام على الفور عند نقاط زمنية عشوائية نتيجة لوقوع أحداث متقطعة (منفصلة).

على سبيل المثال، في نظام صف الانتظار حيث تكون حالة النظام هي عدد الزبائن في النظام ، الأحداث المنفصلة التي تغير هذه الحالة هي وصول الزبون ومغادرة زبون أخر عند انتهاء الخدمة، معظم تطبيقات المحاكاة في الممارسة العملية هي محاكاة الأحداث المنفصلة.

المحاكاة المستمرة هي التي تحدث فيها التغييرات في حالة النظام بشكل مستمر، حيث يتم نمذجة النظام بمساعدة المتغيرات التي تتغير باستمرار وفقا لمجموعة من المعادلات التفاضلية.

14-5- محاكاة مونت كارلو[1] Monte Carlo Simulation :

هي تقنية رياضية تستخدم لتقدير النتائج المحتملة لحدث غير مؤكد، تم ابتكار طريقة مونت كارلو من قبل جون فون نيومان وستانيسلاف أولام[2] خلال الحرب العالمية الثانية لتحسين عملية صنع القرار في ظل ظروف غير مؤكدة.

يمكننا استخدام محاكاة مونت كارلو لتوليد متغيرات عشوائية ، بحيث هذه التقنية تمكننا من تحديد درجة عدم اليقين ونمذجة مخاطر النظام ، تتيح المحاكاة إمكانية إنشاء المسار ونتيجة النموذج عن طريق حسابات عددية، هذه الطريقة تجعل من الممكن نمذجة المخاطر في النظام، و تجعل من الممكن إنشاء تقدير تقريبي للمخاطر وعدم اليقين في النظام و ميزتها أنها تستخدم على نطاق واسع، على سبيل المثال: يستخدمها العديد من الخبراء في التمويل والذكاء الاصطناعي والإحصاء والبيولوجيا الحاسوبية والعلوم الفيزيائية.

14-5-1- ميكانيزم محاكاة مونت كارلو:

لا تولد محاكاة مونت كارلو قيمة نتيجة واحدة ، لكنها تنتج سلسلة من النتائج المحتملة، هذا هو السبب في أنها الأسلوب المفضل والأسهل لتحليل مخاطر النموذج ، يستبدل النموذج بمجموعة مختلفة من النتائج المحتملة، باختصار يستمد التوزيع الاحتمالي لعامل غير مؤكد.

تتكرر هذه المحاكاة وفي كل مرة تحسب قيما عشوائية مختلفة باستخدام دوال الاحتمال، يتطلب إجراء محاكاة الآلاف من عمليات إعادة الحساب اعتمادا على عدم اليقين في النموذج.

---

[1]- سميت على اسم مدينة كازينو مشهورة، تسمى موناكو، حيث أن عنصر الفرصة هو جوهر نهج تكوين النماذج.
[2] - **ستانيسلاف أولام (1909 – 1984)Stanisław Ulam** ، رياضياتي بولندي – أمريكي.

يمكننا استخدام التوزيع الاحتمالي لإيجاد نتائج مختلفة من متغيرات مختلفة لتحليل المخاطر، هذه هي الطريقة الأكثر منطقية وواقعية للاستخدام، فأساس محاكاة مونت كارلو هو التجريب عن طريق الصدفة أو (الاحتمالية) عن طريق أخذ العينات العشوائية.

تنقسم هذه التقنية إلى خمس خطوات بسيطة:

1. إعداد توزيع احتمالي للمتغيرات الهامة.
2. بناء توزيع احتمالي تراكمي لكل متغير.
3. إنشاء فاصل من الأرقام العشوائية لكل متغير.
4. توليد أرقام عشوائية.
5. محاكاة سلسلة من التجارب في الواقع.

تطبيق 1:

أجريت دراسة لمبيعات 5 منتجات في سوبر ماركت، فدامت الدراسة 300 يوما، بحيث كل يوم يتم اختيار مشتري عشوائيا ممن دخل هذ المتجر، وتم تسجيل مقتنياته من المنتجات، وبعد انتهاء مدة الدراسة كانت النتائج مبينة في الجدول الاتي:

عدد مبيعات المنتجات	0	1	2	3	4	5
التكرارات	40	62	100	48	32	18

المطلوب:

- حساب عدد المبيعات المتوقعة من المنتجات ؟
- إجراء المحاكاة باستخدام طريقة مونت كارلو لعدد المبيعات المتوقعة خاصة بـ 20 يوم قادمة.

حل التطبيق1:

أولا: – حساب الاحتمال والاحتمال المتراكم

x_i	التكرار	$P(x_i)$	الاحتمال المتراكم
0	40	$\frac{40}{300}=0.13$	0.13
1	62	$\frac{62}{300}=0.21$	0.34
2	100	$\frac{100}{300}=0.33$	0.67
3	48	$\frac{48}{300}=0.16$	0.83
4	32	$\frac{32}{300}=0.11$	0.94
5	18	$\frac{18}{300}=0.06$	1

1- حساب عدد المبيعات المتوقعة من المنتجات:

$$E(x) = \sum_{i=0}^{5} x_i P(x_i) = 0\times 0.13 + 1\times 0.21 + 2\times 0.33 + 3\times 0.16$$
$$+ 4\times 0.11 + 5\times 0.06 = 1.99$$

2- إجراء المحاكاة باستخدام طريقة مونت كارلو لعدد المبيعات المتوقعة خاصة بـ 20 يوم القادمة .

تحديد مجال الأرقام العشوائية بدلالة التوزيع التراكمي:

توليد الأرقام العشوائية ، نذهب إلى جدول الأرقام العشوائية ونختار صف وعمود عشوائي، ثم نختار عددا مكونا من رقمين ثم نواصل القراءة سواء من أعلى إلى أسفل أو من اليمين إلى اليسار أو من الأسفل إلى الأعلى (و أي رقم يتكرر يلغى)

$$\begin{pmatrix} 75, 76, 66, 33, 12, 14, ... \\ 0.75, 0.76, 0.66, 0.33, 0.12, 0.14, ... \end{pmatrix}$$

x_i	$P(x_i)$	الاحتمال المتراكم	مجال الأرقام العشوائية
0	$\frac{40}{300} = 0.13$	0.13	0.00→0.13
1	$\frac{62}{300} = 0.21$	0.34	0.14→0.34
2	$\frac{100}{300} = 0.33$	0.67	0.35→0.67
3	$\frac{48}{300} = 0.16$	0.83	0.68→0.83

4	$\frac{32}{300} = 0.11$	0.94	0.84→0.94
5	$\frac{18}{300} = 0.06$	1	0.95→1.00

جدول الأرقام العشوائية

11164	36318	75061	37674	26320	75100	10431	20418	19228	91792
21215	91791	76831	58678	87054	31687	93205	43685	19732	08468
10438	44482	66558	37649	08882	90870	12462	41810	01806	02977
36792	26236	33266	66583	60881	97395	20461	36742	02852	50564
73944	04773	12032	51414	82384	38370	00249	80709	72605	67497
49563	12872	14063	93104	78483	72717	68714	18048	25005	04151
64208	48237	41701	73117	33242	42314	83049	21933	92813	04763
51486	72875	38605	29341	80749	80151	33835	52602	79147	08868
99756	26360	64516	17971	48478	09610	04638	17141	09227	10606
71325	55217	13015	72907	00431	45117	33827	92873	02953	85474
65285	97198	12138	53010	94601	15838	16805	61004	43516	17020
17264	57327	38224	29301	31381	38109	34976	65692	98566	29550
95639	99754	31199	92558	68368	04985	51092	37780	40261	14479
61555	76404	86210	11808	12841	45147	97438	60022	12645	62000
78137	98768	04689	87130	79225	08153	84967	64539	79493	74917

ملاحظة : باقي الجدول مبين في نهاية الفصل.

اليوم	الرقم العشوائي	عدد المبيعات	
1	75	3	
2	76	3	
3	66	2	
4	33	1	
5	12	0	

6	14	1	
7	41	2	
8	38	2	
9	64	2	
10	13	0	
11	12	0	
12	31	1	
13	86	4	
14	4	0	
15	26	1	
16	87	4	
17	8	0	
18	60	2	
19	82	3	
20	78	3	
		34	**اجمالي**
		$\frac{34}{20}=1.70$	**المتوسط**

3- توضيح عن المبيعات المتوقعة:

مثلا القيمة الأولى الرقم العشوائي 0.75 ، نذهب إلى مجال التوزيع المتراكم نلاحظ أن 0.75 محصورة بين (0.68→0.83) تناظرها قيمة 3 من المبيعات، وهكذا مع بقية القيم.

التفسير:

بعد حساب عدد المبيعات المتوقعة بالطريقة العادية وجدناها (1.99)، وبطريقة المحاكاة مون كارلو وجدناها (1.70)، ومع ذلك إذا تم تكرار هذه المحاكاة مئات أو ألاف المرات،

ستكون النتيجة تقريبا بنفس الطريقة الأولى.

تطبيق2 : تطبيق طريقة مونت كارلو في نظرية صفوف الانتظار:

إذا كان سداد أحد المتاجر يستوعب زبون واحد فقط، بحيث كان توزيع وصول الزبائن إلى هذا المتجر يتبع توزيع بواسون ، ومتوسط زمن المكوث عند الكاشير (أمين الصندوق) يتبع التوزيع الأسي ، نموذج الخدمة يتبع الذي يصل أولا يخدم أولا مع عدد كبير جدا (غير محدود تقريبا) من المشترين.

نعتبر نموذج بمركز خدمة واحد بأزمنة وصول تتراوح ما بين 1 و 10 دقيقة، و احتمال كل فاصل زمني طوله 1 دقيقة هو $\frac{1}{10}$ ، نستخدم جدول الأرقام العشوائية لإيجاد زمن وصول الزبائن على النحو التالي:

مجال الأرقام العشوائية	الاحتمال المتراكم	الاحتمال	الزمن بين وصولين
0.0→0.10	0,1	0,1	1
0.11→0.20	0,2	0,1	2
0.21→0.30	0,3	0,1	3
0.31→0.40	0,4	0,1	4

5	0,1	0,5	0.41→0.50
6	0,1	0,6	0.51→0.60
7	0,1	0,7	0.61→0.70
8	0,1	0,8	0.71→0.80
9	0,1	0,9	0.81→0.90
10	0,1	1	0.91→1.00

نقوم بنفس الشيء بالنسبة لزمن الخدمة الذي يتراوح بين 1 و 6 دقيقة وتحصلنا على الجدول التالي:

زمن الخدمة	الاحتمال	الاحتمال المتراكم	مجال الأرقام العشوائية
1	0,1	0,1	0.0→0.10
2	0,2	0,3	0.11→0.30
3	0,3	0,6	0.31→0.60
4	0,25	0,85	0.61→0.85
5	0,1	0,95	0.86→0.95
6	0,05	1	0.96→1.00

نود الحصول على خصائص التشغيل لنظام صف الانتظار لهذا المتجر بطريقة مونت كارلو من خلال محاكاة زمن وصول وخدمة 30 زبون.

حل التطبيق 2 :

أولا نقوم بتوليد الأرقام العشوائية ، نذهب إلى جدول الأرقام العشوائية ونختار صف وعمود عشوائي، ثم نختار عددا مكونا من رقمين ، نبدأ بزمن الوصول ثم زمن الخدمة لـ 30 زبون.

زمن الوصول:

الزمن	الرقم العشوائي	الزبون	الزمن	الرقم العشوائي	الزبون
1	4	16			1
9	84	17	8	75	2
3	21	18	8	76	3
4	33	19	7	66	4
8	71	20	4	33	5
5	50	21	2	12	6
3	27	22	2	14	7
7	62	23	5	41	8
8	71	24	4	38	9
6	54	25	7	64	10
1	9	26	2	13	11
3	30	27	2	12	12
2	14	28	4	38	13
10	97	29	4	31	14
6	52	30	9	86	15

زمن الخدمة:

الزمن	الرقم العشوائي	الزبون	الزمن	الرقم العشوائي	الزبون
2	19	16	2	26	1
5	92	17	5	87	2
3	31	18	1	8	3
5	91	19	3	60	4
5	87	20	4	82	5

6	78	4	21	8	1
7	33	3	22	20	2
8	80	4	23	41	3
9	48	3	24	63	4
10	0	1	25	68	4
11	94	5	26	96	6
12	31	3	27	9	1
13	68	4	28	16	2
14	12	2	29	16	2
15	79	4	30	51	3

نقوم الآن بتجميع البيانات معا وإلقاء نظرة على كيفية متابعة الثلاثون زبون من خلال النظام، نوضحها في الجدول التالي:

الزبون	الزمن بين الوصولين	زمن الوصول	زمن الخدمة	بداية الخدمة	انتهاء الخدمة	زمن الانتظار في الصف	زمن الانتظار في النظام	زمن الخمول
1	0	0	2	0	2	0	2	0
2	8	8	5	8	13	0	5	6
3	8	16	1	16	17	0	1	3
4	7	23	3	23	26	0	3	6
5	4	27	4	27	31	0	4	1
6	2	29	4	31	35	2	6	0
7	2	31	3	35	38	4	7	0
8	5	36	4	38	42	2	6	0
9	4	40	3	42	45	2	5	0
10	7	47	1	47	48	0	1	2
11	2	49	5	49	54	0	5	1
12	2	51	3	54	57	3	6	0
13	4	55	4	57	61	2	6	0
14	4	59	2	61	63	2	4	0
15	9	68	4	68	72	0	4	5
16	1	69	2	72	74	3	5	0
17	9	78	5	78	83	0	5	4
18	3	81	3	83	86	2	5	0

19	4	85	5	86	91	1	6	0
20	8	93	5	93	98	0	5	2
21	5	98	1	98	99	0	1	0
22	3	101	2	101	103	0	2	2
23	7	108	3	108	111	0	3	5
24	8	116	4	116	120	0	4	5
25	6	122	4	122	126	0	4	2
26	1	123	6	126	132	3	9	0
27	3	126	1	132	133	6	7	0
28	2	128	2	133	135	5	7	0
29	10	138	2	138	140	0	2	3
30	6	144	3	144	147	0	3	4
المجموع	**144**		**96**			**37**	**133**	**51**

حساب زمن بداية الخدمة للزبون الحالي= زمن بداية خدمة الزبون السابق + زمن خدمته (السابق)، يجب أن تكون أكبر من زمن وصوله (الحالي)، وإلا يؤخذ زمن وصوله كبداية خدمته.

مثلا:

زمن بداية خدمة الزبون الثاني = 0+2 = 2 أقل من زمن وصوله (8)، لذا نأخذ 8 كبداية زمن خدمته.

بداية خدمة الزبون السادس = 4+27 = 31 .

انتهاء الخدمة = زمن الخدمة + بداية الخدمة.

زمن الانتظار في الصف = بداية الخدمة – زمن الوصول.

زمن الانتظار في النظام = زمن الخدمة + زمن الانتظار في الصف.

زمن الخمول (مركز خدمة فارغ): بالنسبة للزبون الأول وصل في الزمن 0 دقيقة ولديه 2 دقيقة كوقت خدمة ، زمن الانتظار في النظام 2 دقيقة ، إذن لم يكن مركز الخدمة في حالة خمول (فراغ)، بالنسبة لبقية الزبائن نأخذ فقط حالة الزبون الثاني وبقية الزبائن يحسب الزمن بنفس الكيفية:

زمن خمول المركز = زمن بداية خدمة الزبون الثاني – زمن انتهاء الخدمة للزبون الأول، أي : 8−2 = 6 دقائق.

متوسط زمن الانتظار لكل زبون هو 1.23 دقيقة: مجموع زمن الانتظار/ عدد الزبائن:

37/30=1.23

احتمال انتظار الزبون في صف الانتظار هو 43.33 %

احتمال (الانتظار) = مجموع عدد انتظارا الزبائن / عدد الزبائن 0.4333 = 13/30

معدل خمول مركز الخدمة = مجموع زمن الخمول / اجمال زمن التشغيل

51/(51+96)=0.34

متوسط زمن الخدمة = مجموع زمن الخدمة / عدد الزبائن 96/30=3.2

أو بطريقة أخرى:

$$\mathrm{E}\left(service\ time\right)=1\times 0.2+2\times 0.2+3\times 0.3+4\times 0.4+5\times 0.5=3.2$$

متوسط زمن بين وصولين هو 4.96 دقيقة:

144/29 =4.96

متوسط زمن انتظار الزبائن: مجموع زمن الانتظار/ عدد انتظار الزبائن

37/13 =2.84

متوسط زمن الانتظار في النظام = مجموع زمن الانتظار في النظام / عدد الزبائن

. 133/30 =4.43

تطبيق3 : طابور الانتظار بمركزين للخدمة

بنك لديه صرافان (مركزين للخدمة)، يصل الزبائن إلى هذا البنك عشوائيا من 1 إلى 4 دقائق، كل قيمة ممكنة لزمن التداخل لها احتماليات مختلفة الحدوث (مبينة في الجدول)، تختلف أزمنة الخدمة من 1 إلى 6 دقائق الاحتمالات (مبينة في الجدول) مع توزيع مناصف للزبائن بين المركزين، تكمن المشكلة في تحليل النظام من خلال محاكاة الوصول والخدمة بوجود أكثر من مركز خدمة ، احتمالات زمن بين وصولين وزمن الخدمة مبينة في الجدولين التاليين:

مجال الأرقام العشوائية	الاحتمال المتراكم	الاحتمال	الزمن بين وصولين
0.0→0.30	0,30	0,30	1
0.31→0.55	0,55	0,25	2
0.56→0.95	0,95	0,40	3
0.96→1	1	0,05	4

مجال الأرقام العشوائية	الاحتمال المتراكم	الاحتمال	زمن الخدمة
0.0→0.10	0,10	0,10	1
0.11→0.30	0,30	0,20	2
0.31→0.50	0,50	0,20	3
0.51→0.70	0,70	0,20	4
0.71→0.90	0,90	0,20	5
0.91→1.00	1	0,10	6

المطلوب:

ايجاد خصائص التشغيل لنظام صف الانتظار لهذا البنك بطريقة مونت كارلو من خلال محاكاة زمن وصول وخدمة 20 زبون.

حل التطبيق3 :

أولا نقوم بتوليد الأرقام العشوائية ، نذهب إلى جدول الأرقام العشوائية ونختار صف وعمود عشوائي، ثم نختار عددا مكونا من رقمين ، نبدأ بزمن الوصول ثم زمن الخدمة لـ 20 زبون.

زمن الوصول:

الزمن	الرقم العشوائي	الزبون	الزمن	الرقم العشوائي	الزبون
1	13	11			1
1	12	12	3	75	2
2	38	13	3	76	3
2	31	14	3	66	4
3	86	15	2	33	5
1	4	16	1	12	6

7	14	1	17	84	3
8	41	2	18	21	1
9	38	2	19	33	2
10	64	3	20	71	3

زمن الخدمة:

الزبون	الرقم العشوائي	الزمن	الزبون	الرقم العشوائي	الزمن
1	26	2	11	19	2
2	87	5	12	92	6
3	8	1	13	31	3
4	60	4	14	91	6
5	82	5	15	87	5
6	78	5	16	8	1
7	33	3	17	20	2
8	80	5	18	41	3
9	48	3	19	63	4
10	0	1	20	68	4

نقوم الأن بتجميع البيانات معا وإلقاء نظرة على كيفية متابعة محاكاة 20 زبون من خلال النظام، نوضحها في الجدول التالي:

الزبون	الزمن بين الوصولين	زمن الوصول	زمن الخدمة	بداية الخدمة	انتهاء الخدمة	زمن الخدمة	بداية الخدمة	انتهاء الخدمة	زمن الانتظار في الصف	زمن الانتظار في النظام	زمن الخمول1	زمن الخمول2
1		0	2	0	2				0	2	0	
2	3	3	5	3	8				0	5	1	
3	3	6				1	6	7	0	1		6
4	3	9				4	9	13	0	4		2
5	2	11	5	11	16				0	5	3	
6	1	12	5	16	21				4	9	0	
7	1	13				3	13	16	0	3		0
8	2	15				5	16	21	1	4		0
9	2	17	3	21	24				4	7	0	
10	3	20	1	24	25				4	5	0	
11	1	21				2	21	23	0	2		0

12	1	22				6	23	29	1	7		0
13	2	24	3	25	28				1	4		
14	2	26	6	28	34				2	8	0	
15	3	29				5	29	34	0	5	0	0
16	1	30				1	34	35	4	5		0
17	3	33	2	34	36				1	3	0	
18	1	34	3	36	39				2	5	0	
19	2	36				4	36	40	0	4		1
20	3	39				4	40	44	5	9		0
المجموع	**39**		**35**			**35**			**29**	**97**	**4**	**9**
المتوسط	**1,95**		**1,75**			**1,75**			**1,45**	**4,85**		

متوسط زمن الانتظار لكل زبون هو 1.45 دقيقة: مجموع زمن الانتظار/ عدد الزبائن: 20/29 = 1.45 دقيقة.

احتمال انتظار الزبون في صف الانتظار هو 55 %

احتمال (الانتظار) = مجموع عدد انتظارات الزبائن / عدد الزبائن 20/11 = 0.55

معدل خمول مركز الخدمة 1 = مجموع زمن الخمول1 / اجمالي زمن التشغيل 1

4/(4+35)=0.10

معدل خمول مركز الخدمة 2 = مجموع زمن الخمول2 / اجمالي زمن التشغيل 2

9/(9+35)=0.20

متوسط زمن الخدمة 1= مجموع زمن الخدمة 1/ عدد الزبائن 35/20=1.75

متوسط زمن الخدمة 2= مجموع زمن الخدمة 2/ عدد الزبائن 35/20=1.75

متوسط زمن الخدمة الاجمالي = 1.75+1.75 = 3.5 دقيقة.

أو بطريقة أخرى:

$$E(service\ time1) = 1\times0.1 + 2\times0.2 + 3\times0.2 + 4\times0.2 + 5\times0.2 + 6\times0.1 = 3.5$$

متوسط زمن بين وصولين هو 1.95 دقيقة:

20/39 = 1.95

متوسط زمن انتظار الزبائن: مجموع زمن الانتظار/ عدد انتظار الزبائن

20/29 = 1.45 دقيقة

متوسط زمن الانتظار في النظام = مجموع زمن الانتظار في النظام / عدد الزبائن

20/97 = 4.85 دقيقة.

تطبيق4: الطلب اليومي على أجهزة التلفاز:

الطلب اليومي (d) على جهاز تلفاز مؤسسة " س" له توزيع احتمالي، فترة التوريد (L) غير ثابتة ولكن لها توزيع احتمالي، الزبائن الذين يصلون ويجدون المنتج نفد من المخزن سيتسوقون في مكان أخر وستفقد هذه المؤسسة بعض المكانة في السوق، النقطة الأخيرة لم تنجح معها نماذج المخزون المطورة سابقا ، لذا فكر مسؤولو هذه المؤسسة في تطبيق طريقة المحاكاة ، ويدركون أنها لا تستطيع وحدها تحديد أفضل سياسة للمخزون ولكن تمكنهما من مقارنة سياسات (كمية الطلب Q، و نقطة إعادة الطلب ROP)، كانت المعطيات لهذه المؤسسة كالتالي:

المخزون الحالي = 100 جهاز.

تكلفة الاحتفاظ بالمخزون لليوم = 50 دج / للتلفاز.

تكلفة إعداد الطلبية = 10000 دج لكل طلب.

تكلفة العجز = 800 دج لكل مرة (تم فقد البيع).

احتمال الطلب اليومي وفترة التوريد مقدمة في الجدول التالي:

الطلب اليومي	الاحتمال	فترة التوريد	الاحتمال
0	0,05	0	0,09
10	0,40	10	0,50
20	0,34	20	0,33
30	0,16	30	0,08
40	0,05		

نفترض أن المؤسسة تعمل 25 يوما في الشهر، نلاحظ أن هناك متغيرين للقرار (كمية الطلب Q، و نقطة إعادة الطلب ROP) واثنين من المكونين الاحتماليين (الطلب وفترة التوريد)، في مسألة المخزون وباستخدام المحاكاة يمكننا تجربة مجموعات مختلفة من (Q، ROP) لمعرفة أي مجموعة تعطي أدنى تكلفة إجمالية.

المطلوب : إجراء محاكاة تكلفة الطلبية اليومية (لمدة 25 يوم) بطريقة مونت كارلو بفرض $(Q=100\ ,\ ROP=60)$ و $(Q=120\ ,\ ROP=30)$ ؟

حل التطبيق4:

الطلب اليومي	الاحتمال	الاحتمال المتراكم	مجال الأرقام العشوائية
0	0,05	0,05	00→0.04
10	0,40	0,45	0.05→0.44
20	0,34	0,79	0.45→0.78
30	0,16	0,95	0.79→0.94
40	0,05	1	0.95→1

فترة التوريد	الاحتمال	الاحتمال المتراكم	مجال الأرقام العشوائية
0	0,09	0,09	00→0.08
10	0,50	0,59	0.09→0.58

0.59→0.91	0,92	0,33	20
0.92→1	1	0,08	30

أولا : المحاكاة بفرض $(Q=100\ ,\ ROP=60)$:

قرار الطلب: 1: نعم، 0: لا.

									التكلفة			
اليوم	الرقم العشوائي	مخزون أول مدة	الطلب	مخزون أخر مدة	عجز الطلب	قرار الطلب	الرقم العشوائي	فترة التوريد	إعداد الطلبية	التخزين	العجز	الاجمالية
1	90	100	30	70		0				3500		
2	97	70	40	30		1	95	30	10000	1500		
3	38	30	10	20		0				1000		
4	72	20	20	0		0				0		
5	42	100	10	90		0				4500		
6	80	90	30	60		1	66	20	10000	3000		
7	9	60	10	50		0				2500		
8	45	50	20	30		0				1500		
9	15	30	10	20		0				1000		
10	38	20	10	10		0				500		
11	4	10	0	10		0				500		
12	45	110	20	90		0				4500		
13	8	90	10	80		0				4000		
14	14	80	10	70		0				3500		
15	37	70	10	60		1	75	20	10000	3000		
16	43	60	10	50		0				2500		
17	77	50	20	30		0				1500		
18	87	30	30	0		1	37	10	10000	0		
19	78	0	20	0	20	0				0	16000	
20	14	100	10	90		0				4500		
21	64	90	20	70		0				3500		
22	26	70	10	60		1	88	20	10000	3000		
23	31	60	10	50		0				2500		
24	68	50	20	30		0				1500		
25	62	30	20	10		0				500		

50000	**54000**	16000	120000

من خلال محاكاة تكلفة الطلبية اليومية (لمدة 25 يوم) و بفرض

($Q=100$, $ROP=60$) **كان متوسط التكلفة : 4800 دج.**

ثانيا : المحاكاة بفرض ($Q=120$, $ROP=30$):

قرار الطلب: 1: نعم، 0: لا.

اليوم	الرقم العشوائي	مخزون أول مدة	الطلب	مخزون أخر مدة	عجز الطلب	قرار الطلب	الرقم العشوائي	فترة التوريد	إعداد الطلبية	التخزين	العجز	الاجمالية
1	90	100	30	70		0				3500		
2	97	70	40	30		1	95	30	10000	1500		
3	38	30	10	20		0				1000		
4	72	20	20	0		0				0		
5	42	120	10	110		0				5500		
6	80	110	30	80		0				4000		
7	9	80	10	70		0				3500		
8	45	70	20	50		0				2500		
9	15	50	10	40		0				2000		
10	38	40	10	30		1	66	20	10000	1500		
11	4	30	0	30		0				1500		
12	45	30	20	10		0				500		
13	8	10	10	0		0				0		
14	14	120	10	110		0				5500		
15	37	110	10	100		0				5000		
16	43	100	10	90		0				4500		
17	77	90	20	70		0				3500		
18	87	70	30	40		0				2000		
19	78	40	20	20		1	75	20	10000	1000		
20	14	20	10	10		0				500		
21	64	130	20	110		0				5500		
22	26	110	10	100		1	37	10	10000	5000		
23	31	100	10	90		0				4500		
24	68	90	20	70		0				3500		
25	62	70	20	50		0				2500		

40000	70000		110000

من خلال محاكاة تكلفة الطلبية اليومية (لمدة 25 يوم) و بفرض
($Q = 120$, $ROP = 30$) **كان متوسط التكلفة : 4400 دج.**

نلاحظ أن المجموعة ($Q = 120$, $ROP = 30$) أعطت أقل تكلفة يومية لمخزون هذه المؤسسة.

جدول الأرقام العشوائية

11164	36318	75061	37674	26320	75100	10431	20418	19228	91792
21215	91791	76831	58678	87054	31687	93205	43685	19732	08468
10438	44482	66558	37649	08882	90870	12462	41810	01806	02977
36792	26236	33266	66583	60881	97395	20461	36742	02852	50564
73944	04773	12032	51414	82384	38370	00249	80709	72605	67497
04563	12872	14063	93104	78483	72717	68714	18078	25005	04151
64208	48237	41701	73117	33242	42314	83049	21933	92813	04763
51486	72875	38605	29341	80749	80151	33835	52602	79147	08868
99756	26360	64516	17971	48478	09610	04638	17141	09227	10606
71325	55217	13015	79207	00431	45117	33827	92873	02953	85474
65285	97198	12138	53010	94601	15838	16805	61004	43516	17020
17264	57327	38224	29301	31381	38109	34976	65692	98566	29550
95639	99754	31199	92558	68368	04985	51092	37780	40261	14479
61555	76404	86210	11808	12841	45147	97438	60022	12645	62000
78137	98768	04689	87130	79225	08153	84967	64539	79493	74917
62490	99215	84987	28759	19177	14733	24550	28067	68894	38490
24216	63444	21283	07044	92729	37284	13211	37485	10415	36457
16975	95428	33226	55903	31605	43817	22250	03918	46999	98501
59138	39542	71168	57609	91510	77904	74244	50940	31553	62562
29478	59652	50414	31966	87912	87154	12944	49862	96566	48825
96155	95009	27429	72918	08457	78134	48407	26061	58754	05326
29621	66583	62966	12468	20245	14015	04014	35713	03980	03024
12639	75291	71020	17265	41598	64074	64629	63293	53307	48766
14544	37134	54714	02401	63228	26831	19386	15457	17999	18306
83403	88827	09834	11333	68431	31706	26652	04711	34593	22561
10011	75004	86054	41190	10061	19660	03500	68412	57812	57929
92420	65431	16530	05547	10683	88102	30176	84750	10115	69220
35542	55865	07304	47010	43233	57022	52161	82976	47981	46588
86595	26247	18552	29491	33712	32285	64844	69395	41387	87195
72115	34985	58036	99137	47482	06204	24138	24272	16196	04393
40603	16152	83235	37361	98783	24838	39793	80954	76865	32713
40941	53585	69958	60916	71018	90561	84505	53980	64735	85140
73505	83472	55953	17957	11446	22618	34771	25777	27064	13526
39412	16013	11442	89320	11307	49396	39805	12249	57656	88686
57994	76748	54627	48511	78646	33287	35524	54522	08795	56273

الأعلام المذكورة في الفصل الرابع عشر

جون فون نيومان
John von Neumann
(1957 – 1903)

ستانيسلاف أولام
Stanisław Ulam
(1984 – 1909)

الفصل الخامس عشر : التوقع (التنبؤ)

FORECASTING

تمهيد:

التنبؤ هو تقنية تستخدم البيانات التاريخية كمدخلات لعمل تقديرات توضيحية تكون تنبؤية في تحديد الاتجاهات المستقبلية، تستخدم الشركات التنبؤ لتحديد كيفية تخصيص ميزانياتها أو التخطيط للنفقات المتوقعة لفترة زمنية مقبلة، ويعتمد هذا عادة على الطلب المتوقع على السلع والخدمات المعروضة.

استخدام الموارد المتاحة بشكل أمثل هو الهدف الرئيسي لبحوث العمليات، فهي تستخدم تقنيات تحليلية متقدمة لتحسين عملية صنع القرار، حيث يحدد التنبؤ التطوير المستقبلي المحتمل ويساعد على اتخاذ قرار أفضل في مراقبة المخزون، تخطيط الإنتاج، سياسة الاستثمار والسياسة الاقتصادية في التخطيط للمستقبل، تصنف مسائل التنبؤ على المدى القصير والمتوسط والطويل على أساس النطاق الزمني المتضمن في التنبؤ.

تختلف الفئة المعتادة حسب الحالة التي تتم دراستها، حيث تنطبق طرق التنبؤ المختلفة على فئات مختلفة، الهدف الرئيسي من هذا الفصل هو التركيز على طرق التنبؤ المختلفة: مثل الطرق النوعية وطرق الانحدار وطرق السلاسل الزمنية ومزاياها النسبية ومعاييرها لاختيار طريقة مناسبة للتطبيق.

15-1- أنواع التنبؤات:

تستخدم المنظمات ثلاثة أنواع رئيسية من التنبؤات في التخطيط للعمليات المستقبلية:

1- تتناول التوقعات الاقتصادية دورة الأعمال من خلال التنبؤ بمعدلات التضخم، واحتياجات رأس المال، ومؤشرات التخطيط الأخرى.

2- تتعلق التوقعات التكنولوجية بمعدلات التقدم التكنولوجي ، والتي يمكن أن تؤدي إلى ولادة منتجات جديدة ومثيرة تتطلب مصانع ومعدات جديدة.

3- توقعات المبيعات هي توقعات الطلب على منتجات أو خدمات الشركة، حيث تؤدي التوقعات إلى اتخاذ القرارات ، لذلك يحتاج المديرون إلى معلومات فورية ودقيقة حول الطلب الحقيقي، إنهم بحاجة إلى تنبؤات مدفوعة بالطلب ، حيث ينصب التركيز على تحديد وتتبع رغبات الزبائن بسرعة، قد تستخدم هذه التوقعات بيانات حديثة لنقاط البيع ، التقارير التي ينشئها بائع التجزئة عن تفضيلات الزبائن ، وأي معلومات أخرى من شأنها أن تساعد في التنبؤ بأحدث البيانات الممكنة، تعمل التوقعات التي يحركها الطلب على دفع أنظمة إنتاج الشركة وقدرتها وجدولتها وتعمل كمدخلات في التخطيط المالي والتسويق وتخطيط للمورد البشري.

التنبؤ الاقتصادي والتكنولوجي هي تقنيات متخصصة قد تقع خارج دور مدير العمليات، لذلك سيكون التركيز في هذا الفصل على التنبؤ بالطلب.

15-1-1- طرق التنبؤ النوعية:

أولا: طرق التنبؤ الحُكمي:

تعتبر طرق التنبؤ الحُكمي بطبيعتها ذاتية، وقد تتضمن صفات مثل الحدس ورأي الخبراء والخبرة، إنها تؤدي عموما إلى تنبؤات تستند إلى معايير نوعية.

يمكن استخدام هذه الأساليب في حالة عدم توفر بيانات لاستخدام طريقة التنبؤ الإحصائي، ومع ذلك حتى في حالة توفر بيانات جيدة يفضل بعض صانعي القرار طريقة الحُكمي بدلا من الطرق الإحصائية، وفي كثير من الحالات الأخرى يمكن استخدام مزيج من الاثنين.

فيما يلي نظرة عامة موجزة عن طرق التنبؤ الحُكمي.

1- **رأي المدير:** هذه هي أكثر الأساليب غير رسمية ، لأنها تتضمن ببساطة مديرا واحدا يستخدم أفضل حكم لديه لوضع التوقعات، في بعض الحالات قد تكون بعض البيانات متاحة للمساعدة في اتخاذ هذا الحكم، وفي حالات أخرى قد يعتمد المدير فقط على الخبرة والمعرفة العميقة بالظروف الحالية.
2- **لجنة الرأي التنفيذي:** هذه الطريقة مشابهة للطريقة الأولى، إلا أنها تتضمن مجموعة صغيرة من المديرين رفيعي المستوى الذين يجمعون أفضل أحكامهم لوضع التوقعات بشكل جماعي، يمكن استخدام هذه الطريقة للتنبؤات الأكثر أهمية والتي يتقاسم العديد من المديرين التنفيذيين المسؤولية ويمكنهم تقديم أنواع مختلفة من الخبرة.

3- **قوة المبيعات المركبة:** غالبا ما تستخدم هذه الطريقة للتنبؤ بالمبيعات عندما تستخدم الشركة فريق مبيعات للمساعدة في تحقيق المبيعات، إنه نهج من القاعدة إلى القمة حيث يقدم كل مندوب مبيعات تقديرا للمبيعات التي ستكون في منطقته ، ثم يتم إرسال هذه التقديرات من خلال سلسلة القيادة المؤسسية مع المراجعة الإدارية على كل مستوى ، ليتم تجميعها في توقعات مبيعات الشركة.

4- **مسح سوق المستهلك:** تذهب هذه الطريقة إلى أبعد من الطريقة السابقة في اعتماد نهج القاعدة للتنبؤ بالمبيعات، يتضمن إجراء مسح للزبائن والزبائن المحتملين فيما يتعلق بخطط الشراء المستقبلية وكيفية استجابتهم لمختلف الميزات الجديدة في المنتجات، هذه المدخلات مفيدة بشكل خاص لتصميم منتجات جديدة ثم في تطوير التوقعات الأولية لمبيعاتها.

5- **طريقة دلفي:** تستخدم هذه الطريقة فريقا من الخبراء في مواقع مختلفة يقومون بملء سلسلة من الاستبيانات بشكل مستقل، ومع ذلك يتم توفير نتائج كل استبيان مع الاستبيان التالي ، بحيث يمكن لكل خبير بعد ذلك تقييم معلومات هذه المجموعة في تعديل إجاباته في المرة القادمة، الهدف هو الوصول إلى انتشار ضيق نسبيا للاستنتاجات من معظم الخبراء، ثم يقوم صانعو القرار بتقييم هذه المدخلات من لجنة الخبراء لتطوير التوقعات، عادة ما يتم استخدام هذه العملية المتضمنة فقط على أعلى مستويات الشركة أو الحكومة لتطوير تنبؤات طويلة المدى للاتجاهات العامة.

15-1-2- طرق التنبؤ الكمية:

أولا : السلاسل الزمنية TIME SERIES:

السلسلة الزمنية هي سلسلة من القيم العددية التي تمثل تطور كمية معينة بمرور الزمن، يمكن التعبير عن هذه السلاسل من المتغيرات العشوائية رياضيا من أجل تحليل سلوكها بشكل عام لفهم تطورها السابق والتنبؤ بسلوكها المستقبلي، غالبا ما تستخدم نظريات الاحتمال والإحصاء في دراستها.

يتم رسم سلسلة زمنية بشكل متكرر عبر مخطط زمني، حيث تُستخدم في الإحصاء ، ومعالجة الإشارات ، والتعرف على الأنماط ، والاقتصاد القياسي ، والتمويل الرياضي ، والتنبؤ بالطقس ، والتنبؤ بالزلازل ، وهندسة التحكم ، وعلم الفلك ، وهندسة الاتصالات ، الطب ، وإلى حد كبير في أي مجال من مجالات العلوم والهندسة التطبيقية التي تتضمن قياسات زمنية.

تتكون نقاط البيانات هذه عادة من قياسات متتالية يتم إجراؤها من نفس المصدر خلال فترة زمنية وتستخدم لتتبع التغيير بمرور الزمن.

ثانيا: الشكل البياني للسلسلة الزمنية :

يتم إنشاء الأشكال البيانية للسلاسل الزمنية عن طريق رسم قيمة مجمعة (إما عدد أو إحصائية، مثل المجموع أو المتوسط) على خط زمني، تُستخدم الفواصل الزمنية بناء على النطاق الزمني في البيانات التي يتم رسمها لتجميع القيم.

ثالثا: إحصاءات مخطط الزمن:

مخطط السلاسل الزمنية هو رسم بياني يمثل فيه المحور السيني بعض مقاييس الزمن في الواقع ، تمت تسمية المحور x على أنه محور الزمن، يمثل المحور الصادي المتغير الذي يتم قياسه، يتم عرض نقاط البيانات وربطها بخطوط مستقيمة في معظم الحالات ، مما يسمح بتفسير الرسم البياني الناتج.

رابعا : طرق التنبؤ بالسلاسل الزمنية Time series forecasting methods

يستخدم توقع السلاسل الزمنية المعلومات المتعلقة بالقيم التاريخية والأنماط المرتبطة بها للتنبؤ بالنشاط المستقبلي، تشمل طرق التنبؤ بالسلسلة الزمنية ما يلي:

تحليل الاتجاه Trend analysis

تحليل التقلبات الدورية Cyclical fluctuation analysis

تحليل النمط الموسمي Seasonal pattern analysis

كما هو الحال مع جميع طرق التنبؤ فإن النجاح ليس مضمونا، غالبا ما يستخدم التعلم الألي Machine learning لهذا الغرض، وكذلك الحال مع سابقاتها الكلاسيكية: الخطأ ، الاتجاه ، التنبؤ الموسمي Error, Trend, Seasonality Forecast (ETS)، المتوسط المتحرك و الانحدار الذاتي Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA).

من أجل " رؤية الأشياء " في وقت مبكر، فإن نمذجة السلاسل الزمنية (طريقة التنبؤ تعتمد على بيانات السلاسل الزمنية) تتضمن العمل على البيانات المستندة إلى الزمن

(السنوات ، والأيام ، والساعات ، والدقائق) لاشتقاق رؤى خفية تساعد في اتخاذ القرار، نماذج السلاسل الزمنية هي نماذج مفيدة للغاية عندما يكون لدينا بيانات مرتبطة بشكل تسلسلي، تعمل معظم الشركات على بيانات السلاسل الزمنية لتحليل توقعات المبيعات للعام المقبل ، وحركة مرور عبر مواقع الويب ، وتحديد المواقع التنافسية وغير ذلك الكثير من الأمثلة.

أما تحليل مكونات السلسلة الزمنية فنوجزها فيما يلي:

تحليل السلاسل الزمنية يعني تقسيم البيانات السابقة إلى مكونات ثم الإسقاط نحو الأمام، تتكون السلسلة الزمنية من أربعة مكونات:

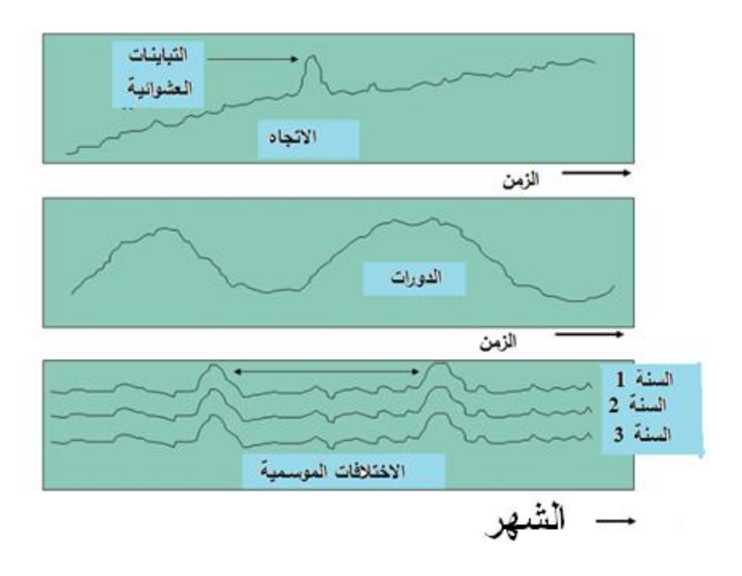
1- **الاتجاه Trend** هو الحركة الصعودية أو الهبوطية التدريجية للبيانات بمرور الزمن، التغييرات في الدخل أو المجتمع أو التوزيع العمري قد تكون مسؤولة عن الحركة في اتجاه.
2- **الموسمية Seasonality** هي نمط بيانات يتكرر بعد فترة من الأيام أو الأسابيع أو الأشهر ، في بيانات السلاسل الزمنية تشير الموسمية إلى وجود تباين يحدث على فترات منتظمة معينة إما على أساس أسبوعي أو شهري أو حتى ربع سنوي (ولكن ليس لمدة تصل إلى سنة على الإطلاق)، قد تتسبب عوامل مختلفة في الموسمية مثل الإجازة والطقس والعطلات، وهي تتألف من أنماط متكررة ودورية ومنتظمة بشكل عام يمكن التنبؤ بها على مستوى السلاسل الزمنية.

3- **الدورات Cycles** هي أنماط في البيانات تحدث على عدة سنوات عادة ما تكون مرتبطة بدورة العمل ولها أهمية كبيرة في تحليل الأعمال على المدى القصير والتخطيط.

4- **التباينات العشوائية** Random variations هي اختلافات تنتج عن الصدفة والمواقف غير العادية، لا تتبع أي نمط يمكن تمييزه، لذلك لا يمكن التنبؤ بها.

نوضح ذلك في الشكل البياني التالي:

الشكل (15-1): مكونات السلسلة الزمنية



خامسا: تخزين بيانات السلاسل الزمنية:

غالبا ما يتم استيعاب بيانات السلاسل الزمنية بأحجام ضخمة وتتطلب قاعدة بيانات مصممة خصيصا للتعامل مع حجمها، الخصائص التي تجعل بيانات السلاسل الزمنية مختلفة تماما عن قدرة عمل البيانات الأخرى هي إدارة دورة حياة البيانات والتلخيص

ومسح النطاق الواسع للعديد من السجلات، هذا هو السبب في أنه من الأفضل تخزين بيانات السلاسل الزمنية في قاعدة بيانات مصممة خصيصا للتعامل مع المقاييس والأحداث أو القياسات المختومة بالزمن.

سادسا : إحصائية السلاسل الزمنية:

تشير إحصائية السلاسل الزمنية إلى البيانات المستخرجة من نموذج السلاسل الزمنية، يجب تسجيل المعلومات على فترات زمنية منتظمة، ويمكن دمجها مع بيانات المقطع العرضي لاشتقاق التنبؤات ذات الصلة.

سابعا:إحصاءات مخطط الزمن plot statistics :

تشير إحصائيات مخطط الزمن إلى تطور سلسلة خلال فترة زمنية محددة، غالبا ما يتم استخدامه في بداية التحليل للتفسير السريع لأي شيء من الاتجاهات إلى الحالات الشاذة.

ثامنا: تحليل السلاسل الزمنية:

نرجع إلى تعريف السلسلة، رياضيا: نقول أن متغير الزمن (المتغير المستقل t) والقيم المناظرة له (المتغير التابع y) وإن كل قيمة في الزمن t يقابلها قيم للمتغير التابع y فإن y دالة في الزمن t أي: $y = F(t)$.

إذا كان X_i متغير عشوائي ذي الأهمية في الزمن i ، وإذا تم أخذ الملاحظات في الأزمنة $i = 1,....,t$ ، فأن القيم المرصودة $(X_1 = x_1, X_2 = x_2,...., X_t = x_t)$ هي سلسلة زمنية.

مثال1:

جدول البيانات الاتي والدال على عدد طلاب جامعة ما لعدة سنوات (الأرقام بالألاف).

السنة	2016	2017	2018	2019	2020	2021
عدد الطلاب	28	35	32	39	45	42

التطبيق على برنامج Maple

```
> X := Vector([2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021], datatype = float[8]) :
> Y1 := Vector([28, 35, 32, 39, 45, 42], datatype = float[8]) :
```

```
> dataplot(X, [Y1])
```

28 30 32 34 36 38 40 42 44
2017 2018 2019 2020 2021

من خلال الشكل البياني نلاحظ تغيرات في تعداد الطلبة من سنة لأخرى بين زيادة ونقصان، لكن خلال الوصف العام نستنتج زيادة في حجم التعداد ونتوقع زيادة في المستقبل، لهذا وجب وضع الاستعدادات اللازمة للتسيير الأمثل لهؤلاء الطلبة.

فالسلاسل الزمنية هي وصف للماضي وهي إجراء منطقي للتنبؤ للمستقبل لأجل الاستفادة من هذه البيانات التاريخية.

تاسعا: مستويات وطرق التنبؤ Forecast Levels and Methods

لنأخذ مثال عن مبيعات منتج ما ، يمكننا إنشاء تنبؤات تفصيلية (عنصر واحد) وتنبؤات موجزة (خط المنتج) تعكس أنماط طلب المنتج، يقوم النظام بتحليل المبيعات السابقة لحساب التوقعات باستخدام عدة طرق تنبؤية، تتضمن التوقعات معلومات تفصيلية على مستوى العنصر ومعلومات ذات مستوى أعلى حول الفرع أو الشركة ككل.

15-2- معايير تقييم أداء التنبؤ Forecast Performance Evaluation Criteria

اعتمادا على انتقاء خيارات المعالجة وعلى الاتجاهات والأنماط في بيانات المبيعات ، تؤدي بعض طرق التنبؤ أداء أفضل من غيرها لمجموعة بيانات تاريخية معينة، قد لا تكون طريقة التنبؤ المناسبة لمنتج واحد مناسبة لمنتج أخر، وقد نجد أن طريقة التنبؤ التي توفر نتائج جيدة في مرحلة واحدة من دورة حياة المنتج تظل مناسبة طوال دورة الحياة بأكملها.

يمكننا الاختيار بين ثلاث طرق لتقييم الأداء الحالي لنهج التنبؤ:

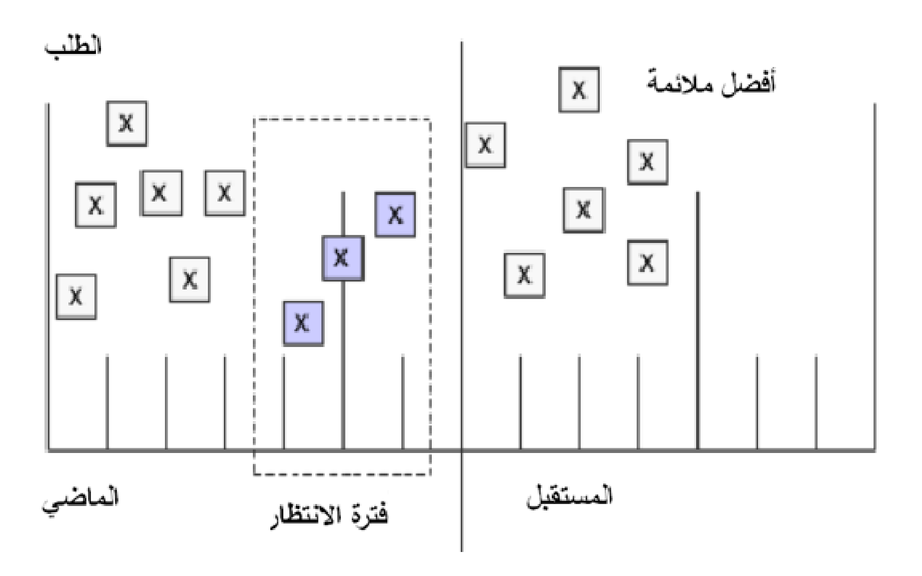
- متوسط الانحراف المطلق(Mean absolute deviation (MAD
- متوسط مربع الخطأ Mean Squared Error
- متوسط انحراف المطلق المئوي Mean Absolute Percent Error

تتطلب هذه الطرق لتقييم الأداء بيانات مبيعات تاريخية لفترة نحددها تسمى بفترة التوقف أو الفترة التي تناسبها بشكل أفضل، يتم استخدام البيانات في هذه الفترة كأساس للتوصية بأسلوب التنبؤ الذي يجب استخدامه في عمل توقعات التنبؤ التالية، هذه التوصية خاصة بكل منتج ويمكن أن تتغير من جيل تنبؤ إلى أخر.

15-2-1- أفضل ملائمة Best Fit :

يوصي النظام بأفضل توقع ملائم من خلال تطبيق طرق التنبؤ المحددة على سجلات طلبيات المبيعات السابقة ومقارنة محاكاة التنبؤ بالتاريخ الفعلي، عند إنشاء أفضل توقع ملائم يقارن النظام سجلات طلبيات المبيعات الفعلية بالتنبؤات لفترة زمنية محددة ويحسب مدى دقة كل طريقة توقع مختلفة في توقع المبيعات، ثم يوصي النظام بالتنبؤ الأكثر دقة باعتباره الأنسب والأفضل ، يوضح الشكل التالي أفضل التوقعات الملائمة:

الشكل (15−2): أفضل ملائمة



يستخدم النظام تسلسل الخطوات هذا لتحديد الأنسب:

1− نستخدم كل طريقة محددة لمحاكاة التنبؤ بفترة الانتظار.

2− نقارن المبيعات الفعلية بتنبؤات المحاكاة لفترة الانتظار.

3− نحسب MAD أو MSE أو MAPE لتحديد طريقة التنبؤ الأكثر تطابقا مع المبيعات الفعلية السابقة، يستخدم النظام إحدى الطرق الثلاث بناء على خيارات المعالجة التي نحددها.

4− نوصي بتوقع أفضل ملائمة من خلال المعيار الأقرب إلى الصفر.

15−2−2− طرق التنبؤ Forecasting Methods :

هناك أربعة أنواع رئيسية من طرق التنبؤ التي يستخدمها خبراء التنبؤ ، علما أن هناك مجموعة واسعة من أدوات التنبؤ الكمي المستخدمة بشكل متكرر ، فإننا نركز في هذا

الفصل على أهم أربعة طرق: (1) المتوسط المتحرك ، (2) التمهيد الأسي، (3) الانحدار الخطي البسيط ، (4) الانحدار الخطي المتعدد.

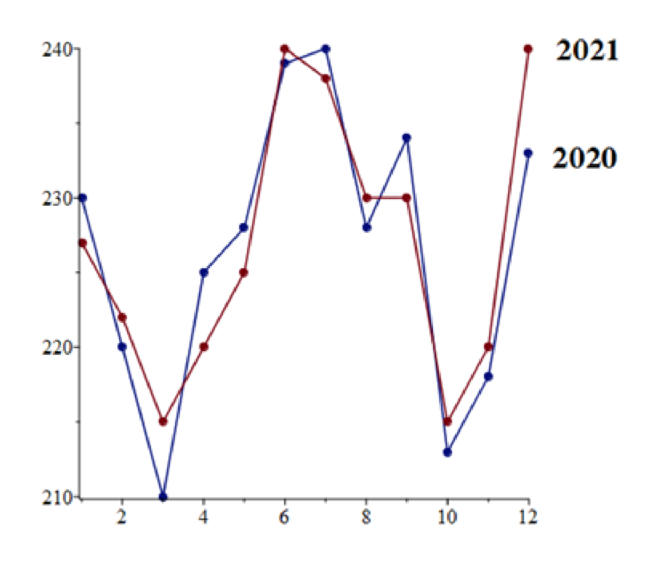
مثال2:

الجدول التالي يمثل مجموعة بيانات تاريخية من مبيعات خاصة بسنتين مضت (2021/2020)، نريد إجراء الإسقاط المتوقع للعام المقبل(2022)، المبالغ بـ 10^4 دج.

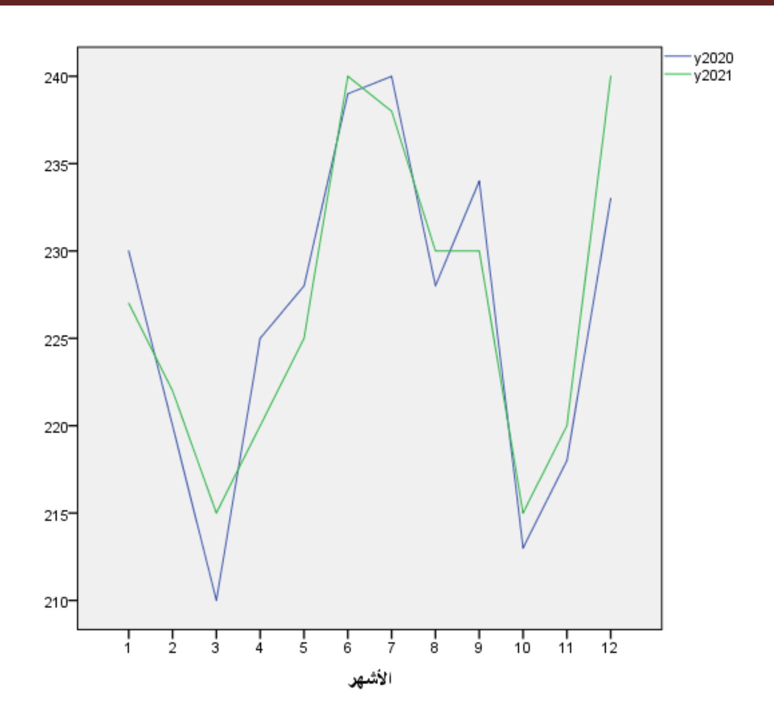
الأشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	230	220	210	225	228	239	240	228	234	213	218	233
2021	227	222	215	220	225	240	238	230	230	215	220	240

نقوم بتمثيل السلاسل بيانيا:

باستخدام برنامج Maple



باستخدام برنامج spss



15-3- طريقة المتوسطات المتحرك Moving averages :

المتوسطات المتحركة هي أسلوب تجانس يبحث في النمط الأساسي لمجموعة من البيانات لإنشاء تقدير للقيم المستقبلية، الأنواع الأكثر شيوعا هي المتوسطات المتحركة لمدة 3 أشهر و 5 أشهر.

رياضيا المتوسط المتحرك البسيط (الذي يعمل كتقدير للفترة التالية يتم التعبير عن **المبيعات** (مثلا)) على النحو التالي:

$$MA = \frac{\sum (\text{المبيعات في } n \text{ فترة سابقة})}{n}$$

مثال3:

نستخدم بيانات المثال السابق الخاصة بمبيعات سنة 2020، **المطلوب:** حساب المبيعات المتوقعة لشهر ديسمبر، إذا علمت أن المدة الزمنية للمتوسط المتحرك كل ثلاثة أشهر.

حل المثال3:

الشهر	**المبيعات**	**المتوسط المتحرك لـ 3 أشهر**
1	230	-
2	231	-
3	210	220
4	215	218.33
5	218	221
6	220	230.67
7	222	235.67
8	228	235.67
9	234	234
10	213	225
11	218	221.67
12	210	221.33

مثلا: $MA = \frac{230+220+210}{3} = 220$ ، وهكذا دواليك.

المبيعات المتوقعة لشهر ديسمبر تقدر بـ : 221.33×10^4 دج.

أما التطبيق على برنامج Maple فيكون على النحو الاتي وذلك باختيار المدة الزمنية للمتوسط المتحرك كل ثلاثة أشهر و كل خمسة أشهر.

```
> with(Statistics) :
> A := ⟨230, 220, 210, 225, 228, 239, 240, 228, 234, 213, 218, 233⟩ :
> B := MovingAverage(A, 3)
```

$$B := \begin{bmatrix} 220. \\ 218.333333333333 \\ 221. \\ 230.666666666667 \\ 235.666666666667 \\ 235.666666666667 \\ 234. \\ 225. \\ 221.666666666667 \\ 221.333333333333 \end{bmatrix}$$

```
> C := MovingAverage(A, 5)
```

$$C := \begin{bmatrix} 222.600000000000 \\ 224.400000000000 \\ 228.400000000000 \\ 232. \\ 233.800000000000 \\ 230.800000000000 \\ 226.600000000000 \\ 225.200000000000 \end{bmatrix}$$

15-4- طريقة التمهيد الأسي Exponential Smoothing:

تحسب هذه الطريقة متوسطا متجانسا، والذي يصبح تقديرا يمثل المستوى العام للمبيعات خلال فترات البيانات التاريخية المحددة ، حيث تتطلب سجلات بيانات

المبيعات للفترة الزمنية التي يتم تمثيلها من خلال عدد الفترات الملائمة بالإضافة إلى عدد فترات البيانات السابقة المحددة، الحد الأدنى من المتطلبات هو فترتان لبيانات تاريخية، هذه الطريقة مفيدة للتنبؤ بالطلب (المبيعات)عندما لا يكون هناك اتجاه خطي في البيانات، هذا يعني أننا لا نحتاج إلى معرفة أي شيء عن التوزيع الإحصائي للبيانات لاستخدامها، قد يصبح التمهيد الأسي أكثر تعقيدا بشكل مطرد مع مرور الزمن ، لكن أبسط طرقه لا تزال مستخدمة اليوم وقد أثبتت فعاليتها في عديد من الحالات.

معادلة التنبؤ باستخدام التمهيد الأسي هي:

التوقع الجديد = المبيعات المتوقعة للفترة الأخيرة + α (المبيعات الفعلية للفترة الأخيرة – المبيعات المتوقعة للفترة الأخيرة)

بالرموز تكون كما يلي: $F_t = F_{t-1} + \alpha\left(A_{t-1} - F_{t-1}\right)$ أو بصيغة مكافئة:

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \left(1-\alpha\right) F_{t-1}$$

حيث α عبارة عن وزن أو ثابت التمهيد يختاره المحلل والذي له قيمة: $0 \le \alpha \le 1$.

F_t : التوقع الجديد.

F_{t-1} : المبيعات المتوقعة للفترة الأخيرة.

α : وزن أو ثابت التمهيد.

A_{t-1} : المبيعات الفعلية للفترة الأخيرة.

مثال4:

بالرجوع إلى المثال(2) (بيانات سنة 2020)، **المطلوب:** استخدام طريقة التمهيد الأسي لتقدير مبيعات شهر جانفي 2021، بافتراض : $(A_1 = F_1)$, $\alpha = 0.2$.

حل المثال4:

نستخدم الصيغة الثانية : $F_t = \alpha A_{t-1} + (1-\alpha) F_{t-1}$

$$F_2 = 0.2(230) + 0.8(230) = 230$$
$$F_3 = 0.2(231) + 0.8(230) = 230.2$$

.

.

$$F_{j/2021} = 0.2(210) + 0.8(222) = 219.6$$

التوقع F_t	المبيعات A_t	الشهر
230	230	1
230	231	2
230.2	210	3
226.16	215	4
223.928	218	5
222.7424	220	6
222.2	222	7
222.16	228	8
223.328	234	9
225.4624	213	10
223	218	11
222	210	12
219.6		جانفي 2021

15-5- قياس خطأ التنبؤ Measuring Forecast Error :

يمكن تحديد الدقة الإجمالية لأي نموذج تنبؤ : المتوسط المتحرك ، أو التمهيد الأسي ، أو غير ذلك ، وذلك بمقارنة القيم المتوقعة مع القيم الفعلية أو المرصودة، إذا كانت F_t تشير إلى التنبؤ في الفترة t ، و A_t تشير إلى الطلب الفعلي في الفترة t ، يتم تعريف خطأ التنبؤ (أو الانحراف) على النحو التالي:

خطأ التنبؤ = الطلب الفعلي − القيمة المتوقعة

$$FE = A_t - F_t$$

يتم استخدام العديد من المقاييس في الممارسة التطبيقية لحساب خطأ التنبؤ الكلي، يمكن استخدام هذه المقاييس لمقارنة نماذج التنبؤ المختلفة ، وكذلك لمراقبة التوقعات للتأكد من أنها تعمل بشكل جيد، هناك ثلاثة مقاييس أكثر شيوعا ، وهي متوسط الانحراف المطلق (MAD) ، متوسط مربع الخطأ (MSE) ، متوسط انحراف المطلق المئوي (MAPE)، لنأخذ المثال السابق لحساب هذه المقاييس.

15-5-1- متوسط الانحراف المطلق Mean Absolute Deviation :

يأخذ الصيغة التالية:

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{n} |A_i - F_i|}{n}$$

مثال5:

انطلاقا من المثال السابق أحسب متوسط الانحراف المطلق MAD .

حل المثال5:

الشهر	المبيعات A_t	التوقع F_t	$\|A_i - F_i\|$
1	230	230	0
2	231	230	1
3	210	230.2	20.2
4	215	226.16	11.16
5	218	223.928	5.928
6	220	222.7424	2.7424
7	222	222.2	2.2
8	228	222.16	5.84
9	234	223.328	10.672
10	213	225.4624	12.4624
11	218	223	5
12	210	222	12
المجموع			**89.2048**

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{n} |A_i - F_i|}{n} = \frac{89.2048}{12} = 7.43$$

يكون التنبؤ جيدا كلما كانت قيمة MAD صغيرة جدا.

15-5-2- متوسط مربع الخطأ Mean Squared Error:

يأخذ الصيغة التالية:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\text{توقع الأخطاء} \right)^2}{n}$$

مثال6:

انطلاقا من المثال السابق أحسب متوسط مربع الخطأ MSE .

حل المثال6:

$(A_i - F_i)^2$	التوقع F_t	المبيعات A_t	الشهر
0	230	230	1
1	230	231	2
408,04	230.2	210	3
124,55	226.16	215	4
35,14	223.928	218	5
7,52	222.7424	220	6
0,04	222.2	222	7
34,11	222.16	228	8
113,89	223.328	234	9

155,3	225.4624	213	10
25	223	218	11
144	222	210	12
87.38		**المجموع**	

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\text{ Forecast errors })^2}{n} = \frac{1048,6}{12} = 87.38$$

15-5-3- متوسط انحراف المطلق المئوي Mean Absolute Percent Error :

يأخذ الصيغة التالية:

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^{n} 100 \cdot |A_i - F_i| / A_i}{n}$$

مثال7:

انطلاقا من المثال السابق أحسب متوسط انحراف المطلق المئوي $MAPE$.

حل المثال7:

$100 \cdot \|A_i - F_i\| / A_i$	التوقع F_t	المبيعات A_t	الشهر
0	230	230	1
0,43	230	231	2

9,62	230.2	210	3
5,19	226.16	215	4
2,72	223.928	218	5
1,25	222.7424	220	6
0,09	222.2	222	7
2,56	222.16	228	8
4,56	223.328	234	9
5,85	225.4624	213	10
2,29	223	218	11
5,71	222	210	12
40,28			

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^{n} 100 \cdot |A_i - F_i| / A_i}{n} = \frac{40.28}{12} = 3.35\%$$

15-6- طريقة الانحدار الخطي البسيط:

يعد الانحدار من المواضيع المهمة والأكثر تناولا في ميدان الإحصاء الاستدلالي، باستخداماته الواسعة في شتى الميادين العلمية والاجتماعية والاقتصادية،.

إن أول من استخدم مفهوم الانحدار هو الانكليزي فرانس قالتون[1] في دراسته بين طول الآباء والأبناء.

عند حسابنا لمعامل الارتباط بين المتغيرين X و Y، عندما تكون العلاقة خطية يمكن صياغتها بمعادلة مستقيم $y=\alpha+\beta x$ ، وللوصول إلى صياغة نهائية للعلاقة بين X و Y وجب تحديد معاملي المعادلة (α و β).

15-6-1- معادلة التنبؤ (معادلة الانحدار):

عند ضماننا أن متغيرين عشوائيين X و Y مرتبطان وفق نموذج خطي بواسطة عينة عشوائية حجمها n من الأزواج المرتبة في قيم x و y حيث $\{(x_i, y_i): i=1,2,...n\}$ ، للحصول على المعادلة المرجوة (التنبؤ) يعتمد هذا على طريقتين وهما:

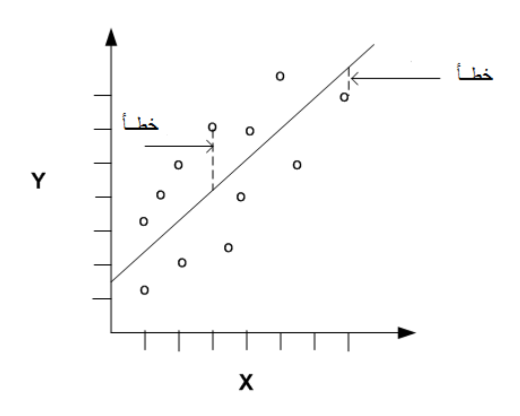
أولا: الطريقة الكلاسيكية:

وهي وضع مسطرة فوق التمثيل البياني لمجموعة من نقاط العينة وتسويتها ووضع خط يمر على غالبية النقاط ومن ثم حساب الميل ومعامل التقاطع.

لنأخذ الشكل التالي:

[1] - **السير فرانسيس قالتون (Sir Francis Galton (1822-1911**، عالم متعدد الثقافات : إحصائي ، عالم اجتماع ، عالم نفس ، عالم أنثروبولوجيا ، مستكشف استوائي ، جغرافي ، مخترع ، عالم أرصاد جوية ، عالم الوراثة ، عالم القياس النفسي ومؤيد للداروينية الاجتماعية وعلم تحسين النسل والعنصرية العلمية، حصل على لقب سير عام 1909.

الشكل (15-3): مستقيم التسوية



ثانيا: طريقة المربعات الصغرى:

لتقدير معالم الانحدار (معامل التقاطع α والميل β) نستخدم طريقة المربعات الصغرى **(Ordinary least squares)**[1]، إذا رمزنا بـ $\hat{y}$ للقيمة التي تتنبؤها $y = \mu_{y/x}$

ولكي يمثل خط التنبؤ $\hat{y}$ أفضل ملائمة ممكنة للقيم الملحوظة لابد لنا أن نجعل هذه الانحرافات أصغر ما يمكن ، يعتمد هذا على مبدأ المربعات الصغرى أي نختار $\hat{\alpha}$

---

[1] - تم نشر أول بحث واضح وموجز لطريقة المربعات الصغرى بواسطة الرياضياتي الفرنسي لوجندر Legendre في سنة 1805، توصف هذه التقنية بأنها إجراء جبري لملائمة المعادلات الخطية على البيانات ، في غضون عشر سنوات بعد نشر Legendre تم اعتماد طريقة المربعات الصغرى كأداة قياسية في علم الفلك والجيوديسيا في فرنسا وإيطاليا وبروسيا ، مما شكل قبولا سريعا للغاية للتقنية العلمية.
في سنة 1809 نشر كارل فريدريش غوص طريقته في حساب مدارات الأجرام السماوية، في هذا العمل إدعى أنه كان يمتلك طريقة المربعات الصغرى منذ عام 1795، أدى هذا بطبيعة الحال إلى نزاع على الأولوية مع Legendre ، ومع ذلك وفقا لحساب Gauss فقد تجاوز Legendre ونجح في ربط طريقة المربعات الصغرى بمبادئ الاحتمال والتوزيع الطبيعي، لقد تمكن من إكمال برنامج لابلاس لتحديد شكل رياضي لكثافة الاحتمالات للمشاهدات اعتمادا على عدد محدود من المعلمات غير المعلومة ، وتحديد طريقة تقدير تقلل من خطأ التقدير، أظهر غوص أن المتوسط الحسابي هو بالفعل أفضل مقدر، ثم حول المسألة عن طريق السؤال عن الشكل الذي يجب أن تكون عليه الكثافة وما هي طريقة التقدير التي يجب استخدامها للحصول على المتوسط الحسابي كتقدير لهذا المعامل، في هذه المحاولة اخترع التوزيع الطبيعي.
صاغ الأمريكي روبرت أدرين Robert Adrain فكرة تحليل المربعات الصغرى بشكل مستقل في عام 1808، في القرنين التاليين ، وجد العاملون في نظرية الأخطاء والإحصاء العديد من الطرق المختلفة لتنفيذ المربعات الصغرى.

و $\hat{\beta}$ بحيث تكون الكمية $Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}e_i^2$ في نهايتها الصغرى ، وبتعويض قيمة $\hat{y}_i$ نجد:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i\right)^2..............(I)$$

ولحساب $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نقوم باشتقاق طرفي العلاقة (I) جزئيا بالنسبة ل $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ والمطابقة مع الصفر نجد:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}}=\sum_{i=1}^{n}(-2)\left[y_i-\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\right)\right]=0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}(-2)\ x_i\left[y_i-\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\right)\right]=0$$

وتؤدي هاتان العبارتان الى:

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=\hat{\alpha}n+\hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n}x_i+\hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

وبحل هذه الجملة نحصل على:

$$\hat{\beta}=\frac{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n(\bar{x})^2}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}$$

$$\hat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}$$

يمكننا استخدام طريقة الانحرافات لحساب $\hat{\beta}$ و هي: $\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$.

مثال8:

بالرجوع إلى المثال (2) المتغير المستقل (x) يمثل الأشهر والمتغير التابع (y) يمثل المبيعات لسنة (2020):

الأشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	230	220	210	225	228	239	240	228	234	213	218	233

المطلوب: أوجد معادلة الانحدار الخطي لـy على x.

حل المثال8:

xy	y²	x²	y	x	
230	52900	1	230	1	
440	48400	4	220	2	
630	44100	9	210	3	
900	50625	16	225	4	
1140	51984	25	228	5	
1434	57121	36	239	6	
1680	57600	49	240	7	
1824	51984	64	228	8	
2106	54756	81	234	9	
2130	45369	100	213	10	
2398	47524	121	218	11	
2796	54289	144	233	12	
17708	616652	650	2718	78	**المجموع**
1475,67	51387,67	54,17	226,5	6,5	**المتوسط**

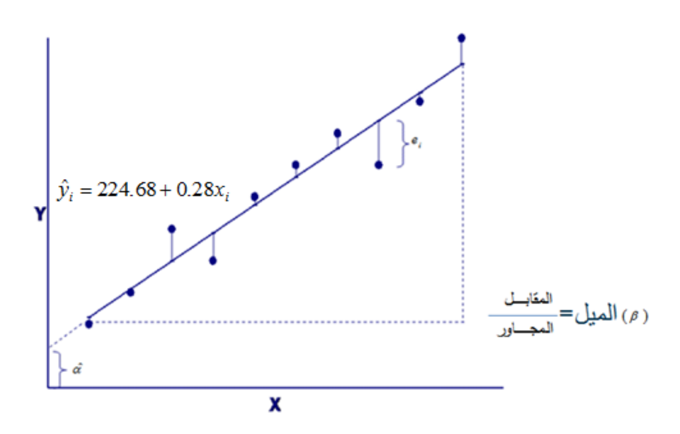
$$\hat{\beta}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{v(x)}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2}=\frac{1475.67-(6.5)(226.5)}{54.17-(6.5)^2}=0.28$$

$$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x}=226.5-(0.28)(6.5)=224.68$$

معادلة الانحدار : $\hat{y}_i=224.68+0.28x_i$

يمكن استخدام هذه المعادلة بغرض التنبؤ بقيمة المتغير y من أجل قيمة معينة لـ x، نريد تقدير المبيعات لشهر جانفي 2021 (13)، فالتنبؤ بالمبيعات سيكون كما يلي:

$$\hat{y}_{13}=224.68+0.28(13)=228.32$$



:

التطبيق على برنامج Maple :

```
> with(Statistics) :
Define Vectors X and Y, containing values of an independent variable x and a dependent variable y.
> X := Vector([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]) :
> Y := Vector([230, 220, 210, 225, 228, 239, 240, 228, 234, 213, 218, 233]) :
> Fit(a x + b , X, Y, x)
                0.286713286713286 x + 224.636363636364
> Fit(a x + b , X, Y, x, summarize = embed)
                0.286713286713286 x + 224.636363636364
```

Model: $0.28671329\,x + 224.63636$

Coefficients	Estimate	Standard Error	t-value	P(>|t|)
a	0.286713	0.841762	0.340611	0.740444
b	224.636	6.19520	36.2598	**$6.05027\ 10^{-12}$**

R-squared: 0.0114685

Adjusted R-squared: −0.0873846

Residuals

Residual Sum of Squares	Residual Mean Square	Residual Standard Error	Degrees of Freedom
1013.24	101.324	10.0660	10

15-6-2- تقدير σ^2:

نقوم بتقدير معلمة غير معلومة في نموذج الانحدار والتي يطلق عليها تباين الخطأ (σ^2)، الانحرافات $e_i = y_i - \hat{y}_i$ نسميها البواقي، حيث تستخدم للحصول على تقدير σ^2، مجموع مربعات البواقي غالبا ما يطلق عليها مجموع مربعات الخطأ حيث:

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

نستطيع أن ننظر الى القيمة المتوقعة لمجموع مربعات الخطأ وهي:

$E\left(SS_E\right)=\left(n-2\right)\sigma^2$ ، ونتيجة لذلك فأن هذا يعتبر مقدر غير متحيز ل σ^2 ، حيث:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{SS_E}{n-2}$$

يمكننا حساب SS_E كما يلي: $SS_E=SS_T-\hat{\beta}\,S_{xy}$

بحيث أن $SS_T=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$ هو مجموع المربعات الكلي.

مثال9:

بالرجوع لبيانات المثال السابق، أوجد تقدير تباين الخطأ (σ^2):

حل المثال9:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=78\ ,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2=650\ ,\sum_{i=1}^{n}y_i=2718\ ,\ \sum_{i=1}^{n}y_i^2=616652$$

$$n=12\ ,\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i=17708$$

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2\ ,\ SS_E=SS_T-\hat{\beta}\,S_{xy}$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=17708-\frac{1}{12}\left(2718\right)\left(78\right)=41$$

$$SS_T=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2=616652-12\left(226.5\right)^2=1025$$

$$SS_E=SS_T-\hat{\beta}\,S_{xy}=1025-\left(0.28\right)\left(41\right)=1013.52$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{SS_E}{n-2}=\frac{1013.52}{10}=101.352$$

15-6-3- خصائص مقدرات المربعات الصغرى:

الخصائص الاحصائية لمقدرات المربعات الصغرى $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ بسيطة الوصف، إن الخطأ العشوائي (ε) للنموذج $y=\alpha+\beta x+\varepsilon$ هو متغير عشوائي بوسط صفر، وتباين (σ^2) نرمز له باختصار $NID(0,\sigma^2)$ ، حيث ε_i هو عبارة عن خطأ وليس عن انحراف مقصود وتوقعه يدور حوا الصفر بمعنى $E(\varepsilon_i)=0$.

بمأن x ثابتة[1] y بوسط $\mu_{y/x}=\alpha+\beta x$ وتباين σ^2، لذلك فقيم $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ تتبع المشاهدة y ، إذن ملخص مقدر المربعات لمعامل الانحدار هو متغير عشوائي ، سنتحقق من تحيز وخصائص تباين مقدر المربعات الصغرى ل $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$.

قضية 1:

- إن المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ الناتجين بواسطة طريقة المربعات الصغرى هما مقدرين غير متحيزين للمعلمتين α و β أي : $E(\hat{\alpha})=\alpha$, $E(\hat{\beta})=\beta$.

- أما تباين المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ فهو كما يلي:

$$V(\hat{\beta})=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2} \quad , \quad V(\hat{\alpha})=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\right)$$

---

[1] في الاحصاء نشاهد قيما عديدة للمتغير y ، نفرض أن هذه القيم ترجع الى توزيع احتمالي ل y ، ولكننا نفرض أن x عددا معروفا لم يتوزع بكيفية عشوائية بل نحدد له قيمة معينة في التجربة ، مثلا إذا كان y هو عدد مبيعات منتوج ما ، و x هو عدد الأشهر، فأن التجربة تحتوي على إعطاء x قيمة معينة (شهر معين) ومشاهدة النتيجة العشوائية y (قيمة المبيعات في ذلك الشهر) ، إذا كان الزوج (x,y) يتوزع طبيعيا لكانت دالة الانحدار خطية كما رأينا سابقا، يعني أن $\mu_{y/x}=\alpha+\beta x$.

– بينما تغاير المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ يكتب كما يلي:

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\alpha}\ ,\ \hat{\beta}\right)=-\frac{\overline{x}\sigma^{2}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)^{2}}$$

الاثبات:

نتذكر بعض الخواص و هي:

$$E\left(e_{i}\right)=0\ \ ,\ \ V\left(e_{i}\right)=\sigma^{2}\ ,\ E\left(y_{i}\right)=\alpha+\beta x_{i}\ \ ,\ \ V\left(e_{i}\right)=\sigma^{2}$$

نبدأ بتوقع المقدر $\hat{\beta}$ فهو كما يلي:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)\left(y_{i}-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)^{2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)y_{i}-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)^{2}}$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)y_{i}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)^{2}}\quad,\quad\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)=0$$

و بالتالي:

$$E\left(\hat{\beta}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)E\left(y_{i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}^{2}-n\overline{x}^{2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-\overline{x}\right)E\left(\alpha+\beta x_{i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}^{2}-n\overline{x}^{2}}$$

$$= \frac{\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} = \beta$$

و منه $E(\hat{\beta}) = \beta$

أما توقع المقدر $\hat{\alpha}$ فهو كالتالي:

من العلاقة $\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}$ فالتوقع يكون :

$$E(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{E(y_i)}{n} - \overline{x}\ E(\hat{\beta})$$
$$E(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha + \beta x_i)}{n} - \overline{x}\ \beta = \alpha + \overline{x}\beta - \overline{x}\beta = \alpha$$

و منه $E(\hat{\alpha}) = \alpha$

أما تباين المقدر $\hat{\beta}$ فهو كما يلي:

$$V(\hat{\beta}) = \frac{V\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(V\left[(x_i - \overline{x})(y_i)\right]\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 V(y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

بينما تباين المقدر $\hat{\alpha}$ فهو كما يلي:

من العلاقة $\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}$ فالتباين يكون :

$$V(\hat{\alpha}) = V(\bar{y}) + V(\hat{\beta}\bar{x}) - 2\bar{x}\,\mathrm{cov}(\bar{y}, \hat{\beta})$$

$$V(\bar{y}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V(\hat{\beta}\bar{x}) = \bar{x}^2 V(\hat{\beta}) = \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\mathrm{cov}(\bar{y}\ ,\ \hat{\beta}) = \mathrm{cov}\left(\bar{y}\ \ ,\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$$

نستخدم خصائص التباين المشترك (التغاير):

$$\mathrm{cov}(ax + b\ ,\ cy + d) = ac\,\mathrm{cov}(x\ ,\ y)\ ,\ \mathrm{cov}(x\ ,\ x) = V(x)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\mathrm{cov}(\bar{y}\ ,\ y_i)$$

$$\mathrm{cov}\left(\frac{1}{n}y_i\ ,\ y_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}\quad ,\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\mathrm{cov}(\bar{y}\ ,\ \hat{\beta}) = 0$$

و بالتالي:

$$V(\hat{\alpha}) = V(\bar{y}) - V(\hat{\beta}\bar{x}) - 2\bar{x}\,\mathrm{cov}(\bar{y}, \hat{\beta})$$

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$V(\hat{\alpha})=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)$$

وأخيرا تغاير المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هو كما يلي:

$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha}\ ,\ \hat{\beta})=\operatorname{cov}(\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}\ ,\ \hat{\beta})$$

من خصائص التباين المشترك نجد: $\operatorname{cov}(x+z\ ,\ y)=\operatorname{cov}(x\ ,\ y)+\operatorname{cov}(z\ ,\ y)$

و منه $\operatorname{cov}(\hat{\alpha}\ ,\ \hat{\beta})=\operatorname{cov}(\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}\ ,\ \hat{\beta})=\operatorname{cov}(\bar{y}\ ,\ \hat{\beta})-\bar{x}\operatorname{cov}(\hat{\beta}\ ,\ \hat{\beta})$

وقد تم إثبات $\operatorname{cov}(\bar{y}\ ,\ \hat{\beta})=0$ ، ونجد أيضا $\operatorname{cov}(\hat{\beta}\ ,\ \hat{\beta})=V(\hat{\beta})$ ، إذن :

$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha}\ ,\ \hat{\beta})=0-\bar{x}\ V(\hat{\beta})$$
$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha}\ ,\ \hat{\beta})=-\frac{\bar{x}\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

15-6-4- اختبار معنوية معاملي الانحدار الخطي البسيط:

لاختبار معنوية ميل خط الانحدار (أو معامل الانحدار) ومعامل التقاطع، رأينا سابقا أن الخطأ العشوائي (ε) أنه يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط صفر، وتباين (σ^2) نرمز له باختصار $NID(0,\sigma^2)$.

سنطبق اختبار t[1] و اختبار F[2] لفحص معنوية معاملي الانحدار (تحليل التباين).

أولا: اختبار معنوية معامل الانحدار $\hat{\beta}$:

صياغة الفرضية تكون على النحو التالي $H_0 : \beta = \beta_0$ ، $H_1 : \beta \neq \beta_0$

أما عن إحصاءة الاختبار فتكون كما يلي $T_0 = \dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} = \dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{Se(\hat{\beta})}$ ،

تتبع توزيع t مع n−2 درجة حرية رفض H_0 إذا كان $|t| \geq t_{\alpha/2, n-2}$

وهناك حالة خاصة جدا وهي كثيرة الاستخدام وهي : $H_0 : \beta = 0$ ، $H_1 : \beta \neq 0$

ثانيا: اختبار معنوية معامل التقاطع $\hat{\alpha}$:

صياغة الفرضية تكون على النحو التالي $H_0 : \alpha = \alpha_0$ ، $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$

---

[1]- نسبة إلى **وليام سيلي غوسيت William Sealy Gosset (1876 – 1937)** ، مهندس كيميائي ، إحصائي بريطاني، في سنة 1908 بمصنع الجعة نشر بحث باسم مستعار سماه توزيع الطالب Student ، وقدم نظرية العينة الصغيرة وفتح الطريق أمام الإحصاءات الاستدلالية.

[2]- نسبة إلى **رونالد فيشر (Sir Ronald Aylmer Fisher) (1890 - 1962)**، إحصائي إنجليزي، وعالم أحياء تطوري، له باع في علم تحسين النسل، وعلم الوراثة، اشتهر فيشر لتطويره مبدأ تحليل التباين في علم الإحصاء، وكذلك مبدأ اختبار فيشر الدقيق ومعادلة فيشر وغيرها كثير، قال عنه أنديرز هالد: «عبقري وضع وحده تقريبا الأسس العلمية للإحصاء الحديث»، فيما لقبه ريتشارد داوكنز «أعظم عالم أحياء منذ داروين».

أما عن إحصاءة الاختبار فتكون كما يلي

$$T_0 = \frac{\hat{\alpha}-\alpha_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha_0}{Se(\hat{\alpha})}$$

، تتبع توزيع t مع n−2 درجة حرية

رفض H_0 إذا كان $|t| \geq t_{\alpha/2,n-2}$

وهناك حالة خاصة جدا وهي كثيرة الاستخدام و هي:

$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha \neq 0$$

مثال10:

نرجع لبيانات المثال رقم (2) الخاص بمبيعات 2020، (نستخدم $\alpha = 0.01$)

المطلوب:

اختبار معنوية معلمات نموذج الانحدار $(\hat{\alpha}, \ \hat{\beta})$

حل المثال10:

$$n = 12 \ , \ \hat{\beta} = 0.28 \ , \ \bar{x} = 6.5 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 650 \ , \sum_{i=1}^{n} y_i = 2718$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 616652 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 17708$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 650 - \frac{1}{12}(78)^2 = 143$$

إيجاد الخطأ المعياري للتقدير $\hat{\sigma}$

يمكن إيجاده بطرقتين و هي:

الطريقة الأولى: حساب $\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-2}$ حيث: $SS_E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2$.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{SS_E}{n-2}} = \sqrt{101.352} = 10.06$$

الطريقة الثانية: يمكن استخدام الصيغة التالية:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}} = \sqrt{\frac{616652 - 224.68(2718) - 0.28(17708)}{10}}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{101.352} = 10.06$$

اختبار معنوية معامل الانحدار $\hat{\beta}$:

$$H_0 : \beta = 0 \quad H_1 : \beta \neq 0 \text{ ، } \alpha = 0.01$$

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} = \frac{0.28}{\sqrt{101.352 / 143}} = 0.332 \quad , \quad t_{0.005,10} = 3.169$$

بمأن t المحسوبة (0.332) أقل من القيمة الجدولية (3.169)، وهذا يعني قبول فرض العدم (H_0) مما يدل على عدم معنوية معامل الانحدار ($\hat{\beta}$).

ج) اختبار معنوية معامل التقاطع $\hat{\alpha}$:

$$H_0 : \alpha = 0 \quad H_1 : \alpha \neq 0 \text{ ، } \alpha = 0.01$$

$$T_0 = \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \right)}} = \frac{224.68}{\sqrt{101.352\left(\frac{1}{12} + \frac{6.5^2}{650 - 12 \cdot 6.5^2} \right)}} = 36.26 \text{ ،}$$

$$t_{0.005,10} = 3.169$$

بمأن t المحسوبة (36.26) أكبر من القيمة الجدولية (3.169)، وهذا يعني رفض فرض العدم (H_0) مما يدل على معنوية معامل التقاطع $(\hat{\alpha})$.

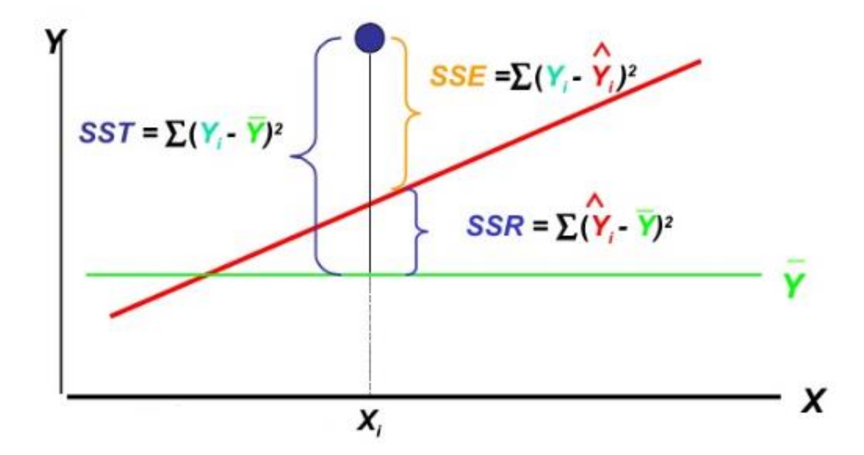
15-7-5- تحليل التباين: مدخل لاختبار معنوية الانحدار:

تدعى هذه الطريقة بتحليل التباين ونستطيع استخدامها لاختبار معنوية معامل الانحدار، حيث تكون الصيغة المستخدمة كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

ونوضح ذلك وفق الشكل الاتي:

الشكل (15-4): تحليل التباين



بحيث أن $SS_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_i)^2$ هو : إجمالي مجموع المربعات.

$SS_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$ هو : مجموع مربعات الانحدار.

$SS_E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ هو : مجموع مربعات الخطأ.

حيث أن: $SS_T=SS_R+SS_E$ ، $SS_R=\hat{\beta}S_{xy}$ ، $SS_E=SS_T-\hat{\beta}S_{xy}$.

صياغة الفرضيات تكون على النحو الاتي:

$$\begin{cases} H_0: \text{نموذج الانحدار غير معنوي} \\ H_1: \text{نموذج الانحدار معنوي} \end{cases}$$

احصاءة الاختبار (فيشر) تكون كما يلي:

$$F_0=\frac{SS_R/1}{SS_E/(n-2)}=\frac{MS_R}{MS_E}$$

SS_T له درجة حرية $(n-1)$ و SS_R و SS_E لهما 1 و $(n-2)$ درجات حرية على التوالي، يمكننا أن نلاحظ: $E(SS_R)=\hat{\beta}S_{xx}$, $E\left(\frac{SS_E}{n-2}\right)=\sigma^2$ ، و SS_E/σ^2 , SS_R/σ^2 هما متغيران عشوائيان يتبعان توزيع كي مربع مع $(n-2)$ و 1 درجات حرية على التوالي.

ويمكننا أيضا كتابة احصاءة الاختبار (فيشر) على الشكل الاتي:

$$F_0=\frac{r^2}{(1-r^2)/(n-2)}$$

يتم رفض H_0 إذا كانت: $F_0 > F_{\alpha,1,n-2}$

أما جدول تحليل التباين الأحادي (ANOVA) هو كما يلي:

مصدر الاختلاف	مربعات الأخطاء	درجات الحرية	متوسط المربعات	F_0
الانحدار	$SS_R = \hat{\beta} S_{xy}$	1	MS_R	$\frac{MS_R}{MS_E}$
الخطأ (البواقي)	$SS_E = SS_T - SS_R$	$n-2$	MS_E	
الكلي	SS_T	$n-1$		

مثال11:

استخدم بيانات المثال السابق لاختبار معنوية نموذج الانحدار وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ؟

حل المثال11:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \quad , \quad SS_E = SS_T - \hat{\beta}\, S_{xy}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 17708 - \frac{1}{12}(2718)(78) = 41$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = 616652 - 12(226.5)^2 = 1025$$

$$SS_R = \hat{\beta} S_{xy} = 0.28(41) = 11.48$$

$$SS_E = SS_T - \hat{\beta}\, S_{xy} = 1025 - (0.28)(41) = 1013.52$$

$$MS_R = SS_R / 1 = 11.48$$

$$MS_E = SS_E / (n-2) = 1013.52 / 10 = 101.352$$

$$F_0 = \frac{MS_R}{MS_E} = \frac{11.48}{101.352} = 0.113 \quad , \quad F_{0.01,1,10} = 10.04$$

الاستنتاج:

بمأن قيمة F_0 المحسوبة أقل من قيمة F الجدولية ، نقبل بالفرضية الصفرية H_0 ، مما يدل على عدم معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط، وبالتالي فأن النموذج لا يمثل العلاقة بين المتغيرين x و y أفضل تمثيل.

ملاحظة 1: نلاحظ أن: $F_0 = T_0^2$

15-6-6- مجالات الثقة:

أولا: مجال الثقة لمعاملي الانحدار (الميل ، معامل التقاطع)

بالإمكان الحصول على مجال ثقة لمقدرات المعلمات، طول مجال الثقة يقيس عموما جودة خط الانحدار.

تعريف:

نفترض أن المشاهدات تتوزع طبيعيا ومستقلة فنسمي $100(1-\alpha)\%$ كمجال ثقة للميل β في نموذج الانحدار الخطي البسيط.

$$\hat{\beta} - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \le \beta \le \hat{\beta} + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}$$

وبالموازاة فأن $100(1-\alpha)\%$ كمجال ثقة لمعامل التقاطع α في نموذج الانحدار الخطي البسيط.

$$\hat{\alpha} - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)} \le \alpha \le \hat{\alpha} + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

ثانيا: ملائمة نموذج الانحدار: Adequacy of the regression model

ملائمة نموذج الانحدار يتطلب عدة فرضيات، فتقدير معلمات النموذج يتطلب افتراض عدم ارتباط الأخطاء العشوائية $E(e_i)=0$ وتباين ثابت، ان اختبار الفرضيات ومجال التقدير يتطلب أن تتوزع الأخطاء توزيعا طبيعيا.

ثالثا: معامل التحديد (R^2):coefficient of determination

يمكن إيجاده وفقا للصيغة التالية: $R^2=\frac{SS_R}{SS_T}=1-\frac{SS_E}{SS_T}$ ، ويستخدم للحكم عن ملائمة نموذج الانحدار ، وبالتالي سوف نلاحظ في حالة ما إذا كانت المتغيرات العشوائية X و Y ذات توزيع مشترك، R^2 هو مربع معامل الارتباط بين X و Y ، بشكل عام يستخدم معامل التحديد R^2 لتقرير ما تفسره المتغيرات المستقلة من تغيرات تطرأ على قيم المتغير التابع، وتتراوح قيمته ما بين($0\le R^2\le 1$)، وفي بعض الأحيان يطلق على معامل التحديد بمعامل التفسير.

رابعا: التحليل الوصفي للبواقي Descriptive Residual Analysis

إن الأخطاء تقدر بـ $\hat{e}_i$ حيث $i=1,...,n$ ، تدعى هذه بالبواقي، تجريبيا لها متوسط يحسب كما يلي:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=0$$

لكن تمثيل $\hat{e}_i$ بدالة لـ x_i قد تكشف لنا طبيعة النموذج (سيئ/ جيد)، وقبل تقديم أمثلة حول تمثيل الأخطاء العشوائية يجب التحقق من الفرضيات التالية:

– وجود علاقة خطية بين x و y .

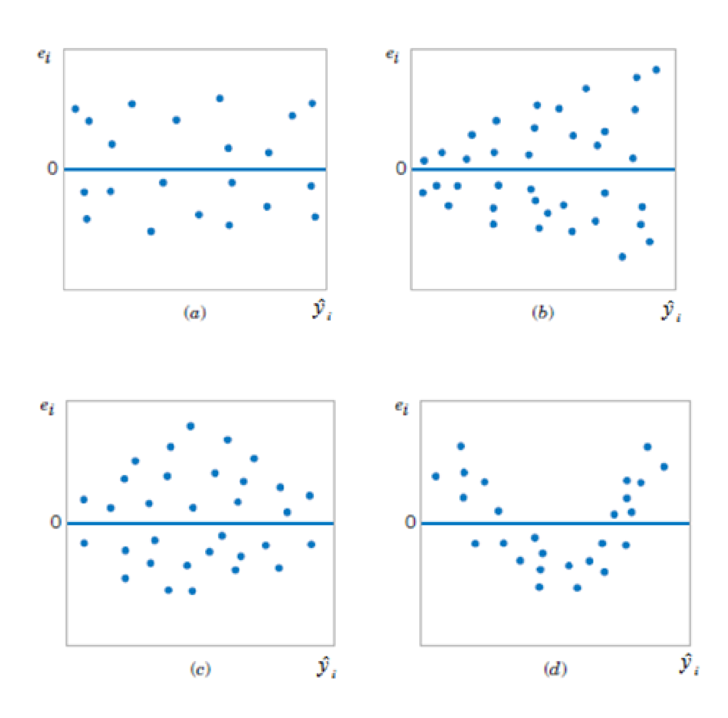
– توزيع الأخطاء طبيعي بوسط صفر وتباين ثابت σ^2 (فرضية تجانس تباين الخطأ العشوائي **Homoscedasticity**).

– عدم وجود ارتباط ذاتي **Autocorrelation** بين الأخطاء العشوائية.

وكما قلنا أن تمثيل الخطأ يكون في المحور العمودي (y) و $\hat{y}$ على المحور الأفقي (x).

للتوضيح أكثر نبين ذلك وفق الأشكال الأتية:

الشكل (15–5): التمثيل البياني للبواقي



a): عدم وجود مشكلة.

b) : زيادة تباين الخطأ العشوائي بزيادة $\hat{y}$.

c) : زيادة وتناقص في تباين الخطأ العشوائي (مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ العشوائي).

d) : عدم ملائمة العلاقة الخطية (يجب استخدام نماذج أخرى غير خطية).

15-7- الانحدار الخطي المتعدد Multiple linear regression

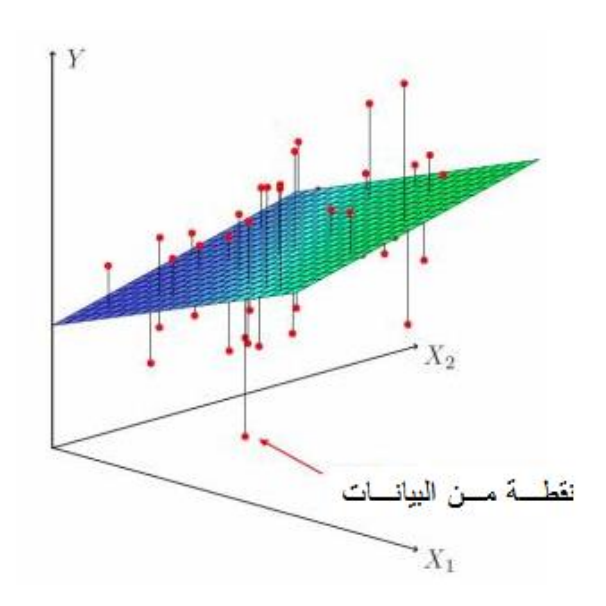
مفهومه:

هو تعميم لتقنية الانحدار الخطي البسيط، بحيث أنه عملية تقدير العلاقة الخطية بين عدة متغيرات، أحد هذه المتغيرات يدعى بالمتغير التابع، والمتغيرات الأخرى تدعى بالمتغيرات المستقلة، ويكون نموذج الانحدار في هذه الحالة كما يلي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + \varepsilon ....(1)$$

لتقدير $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ نستخدم طريقة المربعات الصغرى، ولتوضيح ذلك نأخذ ثلاثة متغيرات أحدهما تابع والأخرين مستقلين، فيمكن تمثيلهما في الشكل الاتـي:

الشكل (15-6): سحابة النقط في حالة ثلاث متغيرات



15-7-1- طريقة المربعات الصغرى:

لنعمم طريقة المربعات الصغرى السابقة لـ k متغيرات مفسرة، انطلاقا من عينة حجمها n فنموذج الانحدار المتعدد يقودنا إلى ما يلي:

تعريف:

لتكن لدينا n من المشاهدات والمتغيرات $(y_i, x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik})$ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ، نفرض أن $n > k$ يمكن التعبير عن العلاقة بالمعادلة التالية:

$$y_i = \beta_0 + \beta_{1.} x_{i1} + \beta_{2.} x_{2.} + ... + \beta_{k.} x_{ik} + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i ....(2)$$

فدالة المربعات الصغرى كما بينا سابقا في طريقة الانحدار الخطي البسيط هي:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} \right)^2 ....(3)$$

إن الحصول على أفضل ملائمة هي أن تجعل مجموع مربعات الانحرافات في نهايتها الصغرى، حيث نقوم بعملية الاشتقاق الجزئي بالنسبة $\beta_k,.....,\beta_2,\beta_1,\beta_0$ ونساوي الناتج إلى الصفر.

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta_0}\right|_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_k} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{k}\hat{\beta}_j x_{ij}\right) = 0.......(4)$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta_j}\right|_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_k} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{k}\hat{\beta}_j x_{ij}\right)x_{ij} = 0 \quad j = 1,2,....k \quad .....(5)$$

نبسط المعادلات (4) و(5) فنحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\begin{array}{l} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}y_i \quad ....(6) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}y_i \end{array}$$

سنحل جملة $P = K + 1$ معادلة لـ $P = K + 1$ مجهول مكونة من المعادلات ذات المشتقات الجزئية.

لحل هذه الجملة نستخدم طريقة كرامر وذلك لإيجاد قيم معاملات معادلة الانحدار.

سنكتب المعادلة (6) على الشكل المصفوفي وهي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} \\ . & . & . & . & . \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ik} & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \widehat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1}y_i \\ . \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ik}y_i \end{bmatrix}$$

فإذا فرضنا أن (Δ) هو المحدد الرئيسي لجملة المعادلات السابقة وأن $\Delta_{\widehat{\beta}_0}, \Delta_{\widehat{\beta}_1}, ..., \Delta_{\widehat{\beta}_n}$ هي المحددات الجزئية التي تسمح بحساب المعاملات $\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, ..., \widehat{\beta}_k$ ، فأن:

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{\Delta_{\widehat{\beta}_0}}{\Delta}, \widehat{\beta}_1 = \frac{\Delta_{\widehat{\beta}_1}}{\Delta}, ..., \widehat{\beta}_k = \frac{\Delta_{\widehat{\beta}_k}}{\Delta}$$

مثال12:

لنفرض أن لدينا بيانات متعلقة بالعمر (x_1) بالسنوات ، والوزن (x_2) بالكلغ ، وضغط الدم الانقباضي (ملم/زئبق) systolic pressure [1] لعينة مكونة من 8 أشخاص.

الأشخاص	العمر (x_1)	الوزن (x_2)	ضغط الدم الانقباضي
1	35	70	125
2	45	72	139
3	48	68	140
4	53	75	145
5	62	80	160
6	67	88	180

[1]- هو كمية الضغط الذي يقوم القلب بتوليده أثناء ضخ الدم عبر الشرايين عند إنقباض عضلته (معدله الطبيعي ما بين 110 إلى 139)

170	90	73	7
168	65	75	8

نريد معرفة ما إذا كانت هناك علاقة خطية بين وزن الأشخاص وضغط الدم الانقباضي وما بين عمر الأشخاص وضغطهم الانقباضي.

المطلوب:

هو تقدير معلمات الانحدار الخطي المتعدد: $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

حل المثال12:

الأشخاص	ضغط الدم y_i	العمر x_{i1}	الوزن x_{i2}	x_{i1}^2	x_{i2}^2	$x_{i1}x_{i2}$	$x_{i1}y_i$	$x_{i2}y_i$
1	125	35	70	1225	4900	2450	4375	8750
2	139	45	72	2025	5184	3240	6255	10008
3	140	48	68	2304	4624	3264	6720	9520
4	145	53	75	2809	5625	3975	7685	10875
5	160	62	80	3844	6400	4960	9920	12800
6	180	67	88	4489	7744	5896	12060	15840
7	170	73	90	5329	8100	6570	12410	15300
8	168	75	65	5625	4225	4875	12600	10920
Σ	1227	458	608	27650	46802	35230	72025	94013

$$n = 8 \;,\; \sum_{i=1}^{8} y_i = 1227 \;,\; \sum_{i=1}^{8} x_{i1} = 458 \;,\; \sum_{i=1}^{8} x_{i2} = 608$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_{i1}^2 = 27650 \;,\; \sum_{i=1}^{8} x_{i2}^2 = 46802 \;,\; \sum_{i=1}^{8} x_{i1}x_{i2} = 35230$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_{i1}y_i = 72025 \;,\; \sum_{i=1}^{8} x_{i2}y_i = 94013$$

بالنسبة للنموذج وطبقا لجملة المعادلة (6)

$$\begin{aligned}
&n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
&\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik} = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}y_i \quad \ldots\ldots\ldots.(6) \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}y_i
\end{aligned}$$

ندرج المجاميع المحسوبة من الجدول السابق في الجملة السابقة، فنحصل على ما يلي:

$$\begin{cases}
8\hat{\beta}_0 + 458\hat{\beta}_1 + 608\hat{\beta}_2 = 1227 \\
458\hat{\beta}_0 + 27650\hat{\beta}_1 + 35230\hat{\beta}_2 = 72025 \\
608\hat{\beta}_0 + 35230\hat{\beta}_1 + 46802\hat{\beta}_2 = 94013
\end{cases}$$

بعد حل الجملة بطريقة كرامر نجد:

$$\hat{\beta}_0 = 52.434 \ , \ \hat{\beta}_1 = 1.096 \ , \ \hat{\beta}_2 = 0.502$$

وبالتالي معادلة الانحدار المتعدد لهذا المثال تكون على النحو الاتي:

$$\hat{y} = 52.434 + 1.096x_1 + 0.502x_2$$

15-7-2- استخدام الشكل المصفوفي في الانحدار الخطي المتعدد

الكتابة المصفوفية تسهل القراءة وتسهل حساب العمليات في تقدير المعلمات، نعتبر نموذج الانحدار المتعدد لـ k متغير ، حيث:

$$y_i = \beta_0 + \beta_{1.}x_{i1} + \beta_{2.}x_{2.} + \ldots\ldots + \beta_{k.}x_{ik} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots.,n$$

هذا النموذج هو جملة لـ n معادلة ، يمكن التعبير عنها بواسطة الشكل المصفوفي التالي $y = X\beta + \varepsilon$ حيث:

$$y=\left(y_1,......,y_n\right)^T\ ,\ \beta=\left(\beta_1,......,\beta_k\right)^T\ ,\ \varepsilon=\left(\varepsilon_1,......,\varepsilon_n\right)^T$$

$$X=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & .... & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & .... & x_{2k} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & .... & x_{n3} \end{bmatrix}$$

عموما: y هو شعاع$(n\times 1)$ للمشاهدات، X هي مصفوفة$(n\times p)$ لمستويات المتغيرات المستقلة، و β هو شعاع$(p\times 1)$ لمعاملات الانحدار، و ε هو شعاع $(n\times 1)$ للأخطاء العشوائية.

سنحاول ايجاد شعاع المربعات الصغرى المقدر $\widehat{\beta}$ ، يعني أن نقلل:

$$L=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\varepsilon^t\varepsilon=\left(y-X\beta\right)'\left(y-X\beta\right).............(1)$$

لتسهل الكتابة استخدمنا رمز (') المنقول بدل من (T).

إن المقدر $\widehat{\beta}$ هو حل لـ β في المعادلة: $\frac{\partial L}{\partial\beta}=0$.

لا ندخل في تفاصيل أخذ المشتقات في المعادلة (1)، ومع ذلك فالمعادلة الواجب حلها هي:

$$X'y=X'X\widehat{\beta}.........(2)$$

نستطيع كتابة مقدر المربعات الصغرى في الشكل التالي:

$$\widehat{\beta}=\left(X'X\right)^{-1}\left(X'y\right).......(3)$$

ولدينا المعادلة التقديرية: $\widehat{y}=X\widehat{\beta}........(4)$

نعوض (3) في (4) فنحصل على: $\hat{y} = X\left(X'X\right)^{-1}\left(X'y\right)$.........(5)

نضع $H = X\left(X'X\right)^{-1}X'$ فنحصل على $\hat{y} = Hy$.........(6)

قضية:

إن المصفوفة H تدعى بمصفوفة القبعة Hat matrix ولها الخصائص التالية:

a− هي مصفوفة متماثلة (symmetric) يعني: $H = H^t$.

b− هي مصفوفة جامدة (عديمة القوة) Idempotent matrix يعني: $H.H = H$.

الاثبات:

قبل اثبات الخاصيتين السابقتين وجب التذكير بخصائص منقول المصفوفة وهي كالاتي:

$$1)\left(A^T\right)^T = A$$
$$2)\left(A+B\right)^T = A^T + B^T \quad , \quad \left(A-B\right)^T = A^T - B^T$$
$$3)\left(kA\right)^T = kA^T \qquad \text{سلمي } k$$
$$4)\left(AB\right)^T = B^T A^T$$

نرجع إلى إثبات الخاصيتين:

$$a)H' = \left[X\left(X'X\right)^{-1} X' \right]'$$

$$= X\left[\left(X'X\right)^{-1} \right]' X'$$

$$= X\left[\left(X'X\right)' \right]^{-1} X'$$

$$= X\left[\left(X'X\right) \right]^{-1} X' = X\left(X'X\right)^{-1} X' = H$$

$$b)H^2 = X\underbrace{\left(X'X\right)^{-1} X'X}_{Id}\left(X'X\right)^{-1} X' = X\left(X'X\right)^{-1} X' = H$$

15-7-3- خصائص المقدرات:

الخصائص الاحصائية لمقدرات المربعات الصغرى بسيطة الوصف، إن الخطأ العشوائي (ε) للنموذج الانحدار الخطي المتعدد هو متغير عشوائي بوسط صفر، وتباين (σ^2) نرمز له باختصار $NID(0,\sigma^2)$ ، حيث ε_i هو عبارة عن خطأ وليس عن انحراف مقصود وتوقعه يدور حول الصفر بمعنى $E\left(\varepsilon_i\right) = 0$.

سنتحقق من تحيز وخصائص تباين مقدرات المربعات الصغرى للنموذج.

قضية:

1- إن المقدر $\hat{\beta}$ الناتج بواسطة طريقة المربعات الصغرى هو مقدر غير متحيز للمعلمة β أي : $E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$.

2- مصفوفة تباين – تغاير للمقدر $\hat{\beta}$ الناتج بواسطة طريقة المربعات الصغرى يعطى كما يلي: $D\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$

الاثبات:

1)

$$E(\hat{\beta}) = E\left[(X'X)^{-1}X'y\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)\right]$$
$$= E\left[(X'X)^{-1}X'X\beta + X'\varepsilon\right] = \beta$$

لأن $E(\varepsilon)=0$ ، و $(X'X)^{-1}(X'X)=Id$ حيث Id مصفوفة الوحدة، أي أن $\hat{\beta}$ هو مقدر غير متحيز .

2)

$$D(\hat{\beta}) = E\left\{\left[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})\right]\left[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})\right]'\right\}$$
$$= E\left\{(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right\}$$
$$= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$
$$= (X'X)^{-1}X'\left\{\sigma^2 I\right\}X(X'X)^{-1}$$
$$= \sigma^2(X'X)^{-1}$$

العناصر الموجودة في قطر المصفوفة $\sigma^2(X'X)^{-1}$ هي تباينات لـ $(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,......,\hat{\beta}_k)$، والعناصر الأخرى تمثل التغايرات، نضع $C=(X'X)^{-1}$: فأن:

$$\begin{cases} V(\hat{\beta}) = \sigma^2 C_{ij} & , \quad i=j \\ \operatorname{cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j) = \sigma^2 C_{ij} & , \quad i\neq j \end{cases}$$

إن تقدير الخطأ المعياري لـ $\hat{\beta}$ هو : $S_e(\hat{\beta}) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{ij}}$

15-7-4- تحليل البواقي:

يمكن التعبير عن الأخطاء كما يلي:

$$e = y - \hat{y} = y - Hy = (I - H)y$$

أيضا نتذكر $e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}$ (وهي صيغة مكافئة لها)

قضية:

مجموع مربعات الخطأ SS_E له صيغ كثيرة باستخدام الشكل المصفوفي، نذكر منها:

$$a) SS_E = e'e = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$$
$$b) SS_E = y'y - \hat{\beta}'X'y$$
$$c) SS_E = y'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]y$$

الاثبات:

- الصيغة a واضحة.

- الصيغة b نوظف الصيغة a ونستخدم خصائص منقول المصفوفة التي بيناها سابقا، فيصبح لدينا:

$$SS_E = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) = (y' - \hat{\beta}'X')(y - X\hat{\beta})$$
$$= y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} ....(1)$$

نتذكر : $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y........(2) \quad , \quad \hat{\beta}' = y'X(X'X)^{-1}......(3)$

نعوض (2) في (1) فينتج:

$$SS_E = y'y - \underbrace{y'X\left(X'X\right)^{-1}}_{\hat{\beta}'} X'y - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'\underbrace{X'X\left(X'X\right)^{-1}}_{Id} X'y ....(4)$$

بعد تبسيط (4) تصبح الصيغة كما يلي:

$$SS_E = y'y - \hat{\beta}'X'y - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'y$$
$$SS_E = y'y - \hat{\beta}'X'y$$

c) قبل إثبات هذه الخاصية ، وجب إثبات أن المصفوفة $(I-H)$ هي كذلك مصفوفة Idempotente .

نضع $B=(I-H)$ بحيث يجب أن نجد $B^2=B$.

$$B^2 = (I-H)(I-H) = \underbrace{I^2}_{I} - \underbrace{IH}_{H} - \underbrace{HI}_{H} + \underbrace{H^2}_{H} = I - H = B$$

من الخاصية a نجد:

$$\begin{aligned} SS_E &= \left[(I-H)y\right]'\left[(I-H)y\right] \\ &= y'(I-H)'(I-H)y \\ &= y'(I'-H')(I-H)y \end{aligned}$$

ونتذكر أن $H'=H$ و $H^2=H$ فيصبح لدينا:

$$SS_E = y'(I-H)y$$

نعوض H بقيمتها $H = X\left(X'X\right)^{-1}X'$ فينتج لنا:

$$SS_E = y'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)y$$

إن تمثيل $\hat{e}_i$ بدالة ل x_i قد تكشف لنا طبيعة النموذج (سيئ/ جيد)، ولبأس من إعادة التذكير من وجوب التحقق من الفرضيات التالية:

- وجود علاقة خطية بين x و y .

- توزيع الأخطاء طبيعي بوسط صفر وتباين ثابت σ^2 (فرضية تجانس تباين الخطأ العشوائي **Homoscedasticity**).

- عدم وجود ارتباط ذاتي **Autocorrelation** بين الأخطاء العشوائية.

مبرهنة غوص– ماركوف:

انطلاقا من الفرضيات الثلاثة السابقة فأن مقدر المربعات الصغرى $\left(\mathrm{OLS}_E\right)$ هو أفضل مقدر خطي غير متحيز **BLUE**[1] للمعلمة β .

الاثبات:

كما أسلفنا الذكر فأن مبرهنة غوص– ماركوف تعتمد على الفرضيات الثلاثة السابقة، أي:

$$\begin{cases} E\left(\varepsilon_i\right) = 0 \\ V\left(\varepsilon_i\right) = \sigma^2 < \infty \end{cases}$$

[1] - Best Linear Unbiased Estimator

يعني مجموعة الأخطاء لها نفس التباين (Homoscedasticity) ، و

$Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$ ، في الشكل المصفوفي نترجمها كما يلي:

$V(\varepsilon)=\sigma^2 I_n$, $E(\varepsilon)=0$ ، I_n : مصفوفة الوحدة $n\times n$.

نتذكر: $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$ ، $V(\hat{\beta})=\sigma^2(X'X)^{-1}$, $E(\hat{\beta})=\beta$ ، نلاحظ أن

$\hat{\beta}=Ay$ حيث: $A=(X'X)^{-1}X'$.

لدينا مقدر أخر خطي غير متحيز: $\tilde{\beta}=Cy$ ، حيث: $E(\tilde{\beta})=\beta$.

إذا رمزنا بـ :D إلى الفرق بين المصفوفة C والمصفوفة A التي تعرف مقدر المربعات الصغرى $\hat{\beta}=Ay$ فأن :

$$E(\tilde{\beta})=E(Cy)=CE(y)=CX\beta=\beta$$
$$\therefore CX=I$$

$$CX=(D+A)X=DX+AX$$
$$=DX+\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}$$
$$CX=DX+I$$

وهذا يستلزم أن: $DX=0$ ، ونستنتج من هذا أن: $(DX)'=X'D'=0$.

$$\tilde{\beta}=\left[\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right]y$$

$$E\left(\tilde{\beta}\right)=E\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)y\right]$$

$$E\left(\tilde{\beta}\right)=E\left[\left(X'X\right)^{-1}X'y+Dy\right]$$

$$=E\left(\left(X'X\right)^{-1}X'y\right)+E\left(DY\right)$$

$$=E\left(\hat{\beta}\right)+E\left[D\left(X\beta+\varepsilon\right)\right]$$

$$=\beta+E\left(DX\right)\beta+\underbrace{E\left(D\varepsilon\right)}_{DE(\varepsilon)=0}$$

$$E\left(\tilde{\beta}\right)=\left[I+DX\right]\beta$$

$\tilde{\beta}$ هو مقدر غير متحيز بشرط أن: $DX=0$.

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=V\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)y\right]$$

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=E\left[\left\{\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)y\right\}\left\{\left(\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)y\right)'\right\}\right]$$

$$=E\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)yy'\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)'\right]$$

$$=\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)E\left(yy'\right)\left(\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right)'\right]$$

وحيث أن : $E\left(yy'\right)=V\left(\varepsilon\right)=\sigma^2 I$

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=\sigma^2\left[\left(X'X\right)^{-1}X'+D\right]\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'\right)'+D'\right]$$

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=\sigma^2\left[\left(X'X\right)^{-1}X'\left(\left(X'X\right)^{-1}X'\right)'+\left(X'X\right)^{-1}X'D'+D\left(\left(X'X\right)^{-1}X'\right)'+DD'\right]$$

علما أن: $DX=0$ ، و $(DX)'=X'D'=0$.

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=\sigma^2\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}\right)'+\left(X'X\right)^{-1}\underset{0}{X'D'}+\underset{0}{DX}\left(\left(X'X\right)^{-1}\right)'+DD'\right]$$

$$\left(\left(X'X\right)^{-1}\right)'=\left(\left(X'X\right)'\right)^{-1}=\left(X'\left(X'\right)'\right)^{-1}=\left(X'X\right)^{-1}$$

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=\sigma^2\left[\left(X'X\right)^{-1}+DD'\right]$$

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=\underbrace{\sigma^2\left(X'X\right)^{-1}}_{V\left(\hat{\beta}\right)}+\sigma^2DD'$$

$$V\left(\tilde{\beta}\right)=V\left(\hat{\beta}\right)+\sigma^2DD'$$

وحيث أن $DD'>0$ هي مصفوفة شبه معرفة موجبة positive semidefinite matrix فأن عناصر قطرها غير سلبية، وبالتالي: $V\left(\tilde{\beta}\right)\geq V\left(\hat{\beta}\right)$.

إذن فأن مقدر المربعات الصغرى $\left(\text{OLS}_E\right)$ له أدنى تباين ، أي أنه أفضل مقدر خطي غير متحيز **BLUE** للمعلمة β .

15-7-5- تقدير σ^2:

كما رأينا في الانحدار الخطي البسيط أنه من المهم تقدير σ^2 (تبيان الخطأ)، وللحصول على σ^2 أجرينا قسمة مجموع مربعات الخطأ SS_E على $n-2$، علما أنه كانت لدينا معلمتين، أما في الانحدار الخطي المتعدد فلدينا P معلمة .

نستطيع أن ننظر الى القيمة المتوقعة لمجموع مربعات الخطأ وهي:

$E\left(SS_E\right)=\left(n-p\right)\sigma^2$ ، ونتيجة لذلك فأن هذا يعتبر مقدر غير متحيز لـ σ^2 ، حيث:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-p} = \frac{SS_E}{n-p}$$

حيث: $p = k+1$

15-7-6- اختبار معنوية معاملات الانحدار الخطي المتعدد:

لاختبار معنوية معاملات الانحدار الخطي ومعامل التقاطع، رأينا سابقا أن الخطأ العشوائي (ε)أنه يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط صفر، وتباين (σ^2) نرمز له باختصار $NID(0,\sigma^2)$.

سنطبق اختبار t و اختبار F لفحص معنوية معاملي الانحدار (تحليل التباين).

أولا : اختبار معنوية نموذج الانحدار:

يهتم هذا الاختبار فيما إذا كانت هناك علاقة معنوية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة،

صياغة الفرضية تكون على النحو التالي :

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \quad \text{على الأقل متغير واحد} \end{cases}$$

رفض الفرضية H_0 يستلزم أنه واحد من المتغيرات $x_k,.....,x_2,x_1$ يساهم في معنوية نموذج الانحدار.

إن اختبار نموذج الانحدار الخطي المتعدد هو تعميم لنموذج الانحدار الخطي البسيط بحيث مجموع المربعات SS_T يقسم إلى ما يلي: $SS_T = SS_R + SS_E$.

لاختبار الفرضية السابقة نقوم بحساب احصاءة الاختبار F وفقا للصيغة الاتية:

$$F_0 = \frac{SS_R / k}{SS_E / (n-p)}$$

SS_T له درجة حرية $(n-1)$، SS_R و SS_E لها k و $(n-p)$ درجات حرية على التوالي.

كما تطرقنا إليه سابقا فأن SS_E / σ^2 و SS_R / σ^2 هما متغيران عشوائيان مستقلان يتبعان كي تربيع مع $(n-p)$ و k درجات حرية على التوالي.

أما جدول تحليل التباين لاختبار معنوية الانحدار المتعدد هو كما يلي:

مصدر الاختلاف	مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط المربعات	F_0
الانحدار	SS_R	k	MS_R	$\frac{MS_R}{MS_E}$
الخطأ (البواقي)	SS_E	$n-p$	MS_E	
الكلي	SS_T	$n-1$		

حيث:

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = y'y - n\bar{y}^2$$

$$SS_R = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - \bar{y} \right)^2 = \hat{\beta}' X' y - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \right)^2$$

$$SS_T = SS_R + SS_E$$

أما معاملي التحديد R^2 و المعدل $\bar{R}^2$ فهما كما يلي:

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = 1 - \frac{SS_E}{SS_T}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SS_E / (n-p)}{SS_T / (n-1)}$$

ثانيا : استخدام اختبار t على المجموعات الجزئية لمعاملات الانحدار الخطي المتعدد:

يستخدم اختبار t في اختبار معنوية معاملات الانحدار المتعدد كلا على حدى، فصياغة الفرضيات تكون على النحو الاتي:

$$H_0 : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

إذا تم قبول H_0 فأن هذا المؤشر (المتغير x_j) يمكن حذفه من النموذج لأن ليس له تأثير على المتغيرy ، أما احصائية الاختبار فهي كما يلي:

$$T_0 = \frac{\widehat{\beta}_j}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2 C_{ij}}} = \frac{\widehat{\beta}_j}{S_e\left(\widehat{\beta}\right)}$$

C_{ij} : عناصر قطر المصفوفة $(X'X)$ المناظرة لكل معامل $\widehat{\beta}_j$ ، فرفض H_0 عندما تكون $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2},n-p}$.

مثال 13:

بالرجوع إلى المثال رقم 12

المطلوب:

أ) قدر معاملات الانحدار باستخدام الشكل المصفوفي؟

ب) حساب معاملي التحديد R^2 و $\overline{R}^2$ مع تفسير النتائج ؟

ج) اختبار معنوية نموذج الانحدار الخطي المتعدد عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

د) اختبار معنوية معلمات النموذج $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

هـ) التنبؤ بضغط الدم الانقباضي لشخص [عمره $x_1 = 90$ و وزنه $x_2 = 50$] ؟

حل المثال13:

أ)

$$X=\begin{bmatrix}1&35&70\\1&45&72\\1&48&68\\1&53&75\\1&62&80\\1&67&88\\1&73&90\\1&75&65\end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix}125\\139\\140\\145\\160\\180\\170\\168\end{bmatrix}$$

نقوم بحساب المصفوفات التالية: $X'X\ ,\ X'y$

$$X^tX=\begin{bmatrix}1&1&...&1\\35&45&...&75\\70&72&...&65\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&35&70\\.&.&.\\.&.&.\\.&.&.\\1&75&65\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&458&608\\458&27650&35230\\608&35230&46802\end{bmatrix}$$

$$X^ty=\begin{bmatrix}1&1&...&1\\35&45&...&75\\70&72&...&65\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}125\\139\\.\\.\\.\\168\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1227\\72025\\94013\end{bmatrix}$$

فمعاملات الانحدار بطريقة المصفوفات هي كما يلي: $\widehat{\beta}=\left(X'X\right)^{-1}\left(X'y\right)$

$$\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\\widehat{\beta}_1\\\widehat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&458&608\\458&27650&35230\\608&35230&46802\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}1227\\72025\\94013\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\\widehat{\beta}_1\\\widehat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.858&-0.002&-0.125\\-0.002&0.0008&-0.0006\\-0.1258&-0.0006&0.002\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1227\\72025\\94013\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52.437\\1.096\\0.502\end{bmatrix}$$

فمعادلة الانحدار الخطي المتعدد هي كما يلي:

$$\hat{y} = 52.437 + 1.096\, x_1 + 0.502\, x_2$$

ب) حساب معاملي التحديد R^2 و $\bar{R}^2$

أولا نحسب مجموع المربعات:

$$SS_E = \left(y - \hat{\beta}X\right)'\left(y - \hat{\beta}X\right)$$

$$SS_E = \left(-0.937, 1.099, \ldots\ldots, 0.733\right)\begin{pmatrix} -0.937 \\ 1.099 \\ . \\ . \\ 0.733 \end{pmatrix} = 170.9184$$

$$SS_T = y'y - n\bar{y}^2 = 190695 - 8\left(23523.90\right) = 2503.875$$
$$SS_R = SS_T - SS_E = 2503.875 - 170.9184 = 2332.956$$

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = \frac{2332.956}{2503.875} = 0.931$$
$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SS_E/(n-p)}{SS_T/(n-1)} = 1 - \frac{170.9184/(5)}{2503.875/(7)} = 0.90$$

التفسير:

من النتائج أعلاه يتضح لنا أن كل من (العمر x_1) و(الوزن x_2) يفسران ما مقداره (93.1%) من التغيرات التي تطرأ على ضغط الدم الانقباضي (y_i)، أما النسبة المتبقية (6.9%) فأنها تعود إلى متغيرات أخرى غير داخلة في نموذج الانحدار المتعدد.

ج) اختبار معنوية نموذج الانحدار الخطي المتعدد عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

لنشكل جدول تحليل التباين ANOVA

مصدر الاختلاف	مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط المربعات	F_0
الانحدار	2332.956	2	1166.478	34.12
الخطأ (البواقي)	170.9184	5	34.183	
الكلي	2503.875	7		

$F_{(0.05\ ,\ 2\ ,\ 5)} = 5.79$

صياغة الفرضيات تكون كالاتي:

H_0 : نموذج الانحدار غير معنوي

H_1 : نموذج الانحدار معنوي

بمأن F_{cal} أكبر من F_{tab} فيتم رفض H_0 أي أن نموذج الانحدار معنوي.

د) اختبار معنوية معلمات النموذج $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

بالنسبة للمعلمة $\widehat{\beta}_1$:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

$$T_0 = \frac{\widehat{\beta}_1}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2 C_{11}}} = \frac{1.096}{\sqrt{34.183(0.0008)}} = 6.627$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-p} = 34.183$$

$$t_{(\alpha/2\ ,\ n-p)} = t_{(0.025\ ,\ 5)} = 2.571$$

بمأن t المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 فهذا يدل على معنوية المعلمة $\hat{\beta}_1$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}_2$:

$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{22}}} = \frac{0.502}{\sqrt{34.183(0.002)}} = 1.919$$

$$t_{(\alpha/2\ ,\ n-p)} = t_{(0.025\ ,\ 5)} = 2.571$$

بمأن t المحسوبة تقع في منطقة قبول H_0 فهذا يدل على عدم معنوية المعلمة $\hat{\beta}_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

هـ) التنبؤ بضغط الدم الانقباضي لشحص [عمره $x_1 = 90$ و وزنه $x_2 = 50$]

$$\hat{y} = 52.437 + 1.096(90) + 0.502(50) = 176.177\,(mm / Mercure)$$

تطبيق:

لدينا بيانات افتراضية لـ 10 دول افريقية متعلقة حول معدل الوفيات (‰)، معدل الأمية (%) والناتج الوطني الخام ساكن(PIB) بالدولار.

البلد	معدل الوفيات (‰)	معدل الأمية (%)	(PIB) لكل ساكن
1	88.2	49	2700
2	116	59.5	2277
3	112	78	3050
4	48	6.4	1560
5	10.2	2.2	4230
6	67	37.4	2540
7	73	44.3	1475
8	108	75	1875
9	11	2.5	3530
10	15	3.8	3250

نفترض أن شروط النموذج الغوصي Gaussian محققة ، نعتبر النموذج:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

المطلوب:

أ) قدر معاملات الانحدار ؟

ب) حساب معاملي التحديد R^2 و $\bar{R}^2$ مع تفسير النتائج ؟

ج) اختبار معنوية نموذج الانحدار الخطي المتعدد عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

د) اختبار معنوية معلمات النموذج $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

حل التطبيق:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 88.2 & 15\\ 1 & 116 & 59.5\\ 1 & 112 & 78\\ 1 & 48 & 6.4\\ 1 & 10.2 & 2.2\\ 1 & 67 & 37.4\\ 1 & 73 & 44.3\\ 1 & 108 & 75\\ 1 & 11 & 2.5\\ 1 & 15 & 3.8\end{bmatrix} \quad , \quad y=\begin{bmatrix}2700\\ 2277\\ 3050\\ 1560\\ 4230\\ 2540\\ 1475\\ 1875\\ 3530\\ 3250\end{bmatrix}$$

$$X^tX=\begin{bmatrix}1 & 1 & ... & 1\\ 88.2 & 116 & ... & 15\\ 49 & 59.5 & ... & 3.8\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 88.2 & 49\\ 1 & 116 & 59.5\\ . & . & .\\ . & . & .\\ . & . & .\\ 1 & 15 & 3.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 648.4 & 358.1\\ 648.4 & 58015.28 & 34213.64\\ 358.1 & 34213.64 & 21077.99\end{bmatrix}$$

$$X^t\mathrm{y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & ... & 1\\ 88.2 & 116 & ... & 15\\ 49 & 59.5 & ... & 3.8\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2700\\ 2277\\ .\\ .\\ .\\ 3250\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26487\\ 1529833\\ 847110\end{bmatrix}$$

فمعاملات الانحدار بطريقة المصفوفات هي كما يلي: $\widehat{\beta}=\left(X'X\right)^{-1}\left(X'y\right)$

$$\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\ \widehat{\beta}_1\\ \widehat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 648.4 & 358.1\\ 648.4 & 58015.28 & 34213.64\\ 358.1 & 34213.64 & 21077.99\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}26487\\ 1529833\\ 847110\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\ \widehat{\beta}_1\\ \widehat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4761 & -0.0128 & 0.0128\\ -0.0128 & 0.0007 & -0.0010\\ 0.0128 & -0.0010 & 0.0014\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}26487\\ 1529833\\ 847110\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3766.24\\ -39.53\\ 40.37\end{bmatrix}$$

فمعادلة الانحدار الخطي المتعدد هي كما يلي:

$$\hat{y} = 3766.24 - 39.53\, x_1 + 40.37\, x_2$$

ب) حساب معاملي التحديد R^2 و $\bar{R}^2$

أولا نحسب مجموع المربعات:

$$SS_E = \left(y - \hat{\beta}X\right)'\left(y - \hat{\beta}X\right)$$
$$SS_E = e'e = 3791563.41$$

$$SS_T = y'y - n\bar{y}^2 = 77269979 - 10\left(2648.7\right)^2 = 7113862.1$$
$$SS_R = SS_T - SS_E = 7113862.1 - 3791563.41 = 3322298.69$$

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = \frac{3322298.69}{7113862.1} = 0.467$$
$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SS_E / (n-p)}{SS_T / (n-1)} = 1 - \frac{541651.915}{790429.122} = 0.314$$

التفسير:

من النتائج أعلاه يتضح لنا أن كل من (معدل الوفيات x_1) و(معدل الأمية x_2) يفسران ما مقداره (46.7%) من التغيرات التي تطرأ الناتج الوطني الخام PIB(y_i)، أما النسبة المتبقية (53.3%) فأنها تعود إلى متغيرات أخرى غير داخلة في نموذج الانحدار المتعدد.

ج) اختبار معنوية نموذج الانحدار الخطي المتعدد عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

لنشكل **جدول تحليل التباين ANOVA**

مصدر الاختلاف	مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط المربعات	F_0
الانحدار	3322298.69	2	1661149.345	3.067
الخطأ (البواقي)	3791563.41	7	541651.915	
الكلي	7113862.1	9		

$F_{(0.05\ ,\ 2\ ,\ 7)} = 4.74$

صياغة الفرضيات تكون كالاتي:

H_0 : نموذج الانحدار غير معنوي

H_1 : نموذج الانحدار معنوي

بمأن F_{cal} أقل من F_{tab} فيتم قبول H_0 أي أن نموذج الانحدار غير معنوي.

د) اختبار معنوية معلمات النموذج $\hat{\beta}_1\ ,\ \hat{\beta}_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}_1$:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{11}}} = \frac{-39.53}{\sqrt{541651.915(0.0007)}} = -2.030$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-p} = 541651.915$$

$$t_{(\alpha/2\ ,\ n-p)} = t_{(0.025\ ,\ 7)} = 2.365$$

بمأن t المحسوبة تقع في منطقة قبول H_0 فهذا يدل على عدم معنوية المعلمة $\hat{\beta}_1$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}_2$:

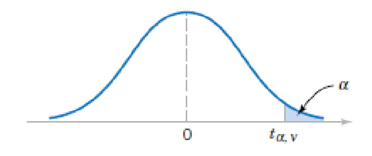
$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{22}}} = \frac{40.37}{\sqrt{541651.915(0.0014)}} = 1.467$$

$$t_{(\alpha/2\ ,\ n-p)} = t_{(0.025\ ,\ 7)} = 2.365$$

بمأن t المحسوبة تقع في منطقة قبول H_0 فهذا يدل على عدم معنوية المعلمة $\hat{\beta}_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

جدول توزيع ستيودنت:

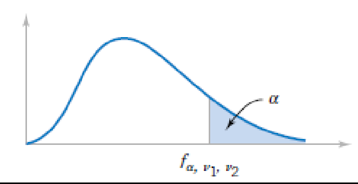


ملحق 3: جدول توزيع student $t_{\nu,\alpha}$

ν	α													
	0.40	**0.30**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.015**	**0.01**	**0.0075**	**0.005**	**0.0025**	**0.0005**
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781

10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

جدول توزيع فيشر:



جدول توزيع فيشر $F_{0.01, v1, v2}$

α = 0.01		درجات حرية البسط (v_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**12 0**	∞
درجة حرية المقام (v_2)	**1**	40 52 .2	49 99 .5	54 03 .4	56 24 .6	57 63 .7	58 59 .0	59 28 .4	59 81 .1	60 22 .5	60 55 .9	61 06 .3	61 57 .3	62 08 .7	62 39 .8	62 60 .7	62 86 .8	63 13 .0	63 39 .4	63 65 .9
	2	98 .5 0	99 .0 0	99 .1 7	99 .2 5	99 .3 0	99 .3 3	99 .3 6	99 .3 7	99 .3 9	99 .4 0	99 .4 2	99 .4 3	99 .4 5	99 .4 6	99 .4 7	99 .4 7	99 .4 8	99 .4 9	99 .5 0
	3	34 .1 2	30 .8 2	29 .4 6	28 .7 1	28 .2 4	27 .9 1	27 .6 7	27 .4 9	27 .3 5	27 .2 3	27 .0 5	26 .8 7	26 .6 9	26 .5 8	26 .5 0	26 .4 1	26 .3 2	26 .2 2	26 .1 3
	4	21	18	16	15	15	15	14	14	14	14	14	14	14	13	13	13	13	13	13

		.20	.00	.69	.98	.52	.21	.98	.80	.66	.55	.37	.20	.02	.91	.84	.75	.65	.56	.46
	5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
	6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
	7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
	8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
	9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
	10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
	12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
	13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
	14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
	15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
	16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
	17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
	18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
	21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
	22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
	23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
	24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
	25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
	26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
	27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
	28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
	29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
	30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
	40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
	60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
	120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.93	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
	∞	6.	4.	3.	3.	3.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.

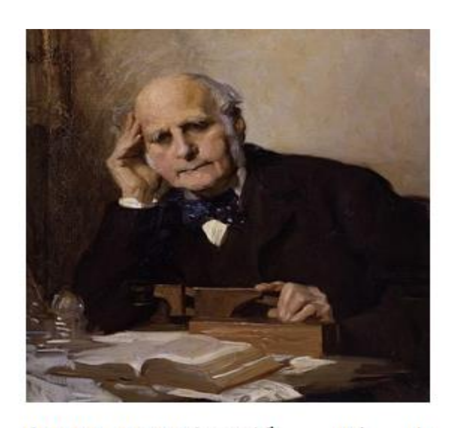
		63	61	78	32	02	80	64	51	41	32	18	04	88	77	70	59	47	32	00

جدول توزيع فيشر (تابع) $F_{0.05, v1, v2}$

α = 0.05		درجات حرية البسط (v_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
درجة حرية المقام (v_2)	**1**	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.6	241.9	243.9	246.0	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
	26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69

	27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
	28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
	29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
	40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
	∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

الأعلام المذكورة في الفصل الخامس عشر



السير فرانسيس قالتون (1822-1911)

Sir Francis Galton

رونالد فيشر
(1962 − 1890)
Sir Ronald Aylmer Fisher

يوهان كارل فريدريش غوص
Johann Carl Friedrich Gauss
(1855 -1777)

وليام سيلي غوسيت (1876 – 1937)
William Sealy Gosset

آندريه ماركوف
Andrey Markov
(1922 - 1856)

قائمة المراجع:

أ) الكتب باللغة العربية:

1) محمد بداوي، الاحتمالات، درا هومة ، الجزائر، 2017.
2) محمد بداوي، الاحصاء الاستدلالي، درا هومة ، الجزائر، 2017.
3) محمد راتول ، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر ، 2004.
4) فتحي خليل الحمدان، بحوث العمليات، دار وائل ، عمان، 2010.
5) سليمان صالح الحيمدان، طرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية وغير الخطية، العبيكان ، الرياض ، 2010/1431.
6) محمد حازي، الدوال ذات عدة متغيرات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.
7) عفاف على حسن الدش، بحوث العمليات واتخاذ القرارات ، الجزء الأول، ط2 ، 2012 ، مكتبة عين شمس.
8) لطفي تاج ، عمار محمود سرحان ، مقدمة في العمليات العشوائية ، جامعة الملك سعود ، الرياض، 2006/1428 .

ب) الدروس والمحاضرات والمجلات:

1) محمد بداوي ، الاحصاء والاحتمالات 1 و 2 سنة ثالثة ورابعة ، قسم الرياضيات ، المدرسة العليا للأساتذة بالأغواط ، 2019/ 2021.
2) محمد بداوي ، تطبيق الاختبارات الاحصائية ، سنة أولى ماستر تخطيط وسكان ، قسم علم الاجتماع والديموغرافيا ، 2019.

ت) الكتب باللغة الأجنبية:

1) Stefan M. Stefanov , Separable Optimization :Theory and Methods, Second Edition , Springer , Switzerland ,2021.
2) Anderson, Sweeney, Williams and Wisniewski , An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, 2nd Edition , United Kingdom , 2014.
3) David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams, Jeffrey D. Camm, &
4) Kipp Martin , An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, Revised Thirteenth Edition , United States of America , 2012.
5) Giuseppe Modica and Laura Poggiolini , A First Course in Probability and Markov Chains , John Wiley & Sons , United Kingdom, 2013.
6) Frederick S. Hillier, Camille C. Price, Markov Chains : Models, Algorithms and Applications , Second Edition , Springer New York , 2013.
7) Nicolas Privault , Understanding Markov Chains : Examples and Applications , Springer Singapore Heidelberg New York Dordrecht London , 2013.
8) FREDERICK S. HILLIER, GERALD J. LIEBERMAN , INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH , Seventh Edition , McGraw-Hill Higher Education , New York, 2001.
9) Yadolah Dodge , Optimisation appliquée , Springer ,Paris , 2002.
10) Mohamed Aidene , Brahim oukacha, Recherche opérationnelle : programmation linéaire , pages bleues , Alger , 2007.
11) Fatiha kacher , Karima bouibed , La Théorie des jeux , pages bleues , Alger , 2012.
12) Ali Bougherra , La : programmation linéaire , editions Houma , Alger , 2010.
13) Wayne L. Winston , Operations Research AP P LI CATI O N S AND A LGORITHMS FO URTH EDITION, Library of Congress ,USA , 2003.
14) Paul E. Fishback , Linear and Nonlinear Programming with Maple: An Interactive,

15) Applications-Based Approach , Chapman and Hall/CRC , Londres , 2019.
16) Xin-She Yang , Optimization Techniques and Applications with Examples , John Wiley & Sons ,USA, 2018 .
17) Jan A. Snyman · Daniel N. Wilke , Practical Mathematical Optimization , Second Edition , Library of Congress Control , USA , 2018.
18) Nick T. Thomopoulos , Fundamentals of Queuing Systems , Springer New York Heidelberg Dordrecht London , 2012.
19) HEIZER J A Y , B A R R Y RENDER , C H U C K MUNSON ,O P E R AT I O N S MANAGEMENT , Pearson Education , USA , 2017.
20) A. Ravi Ravindran , Operations research and management science handbook , Taylor & Francis Group , USA , 2008.
21) Malika Babes , statistiques , files d'attente et simulation , opu, Alger ,1995.

ث) الدروس باللغة الأجنبية:

1) Branislav L. Slantchev , Game Theory: Elements of Basic Models , Department of Political Science, University of California – San Diego April 23, 2009.

2) Michel Bierlaire , Optimisation en nombres entiers , EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité – ENAC.

3) Bibhas C. Giri , Dynamic Programming , Department of Mathematics Jadavpur University Kolkata, India.

4) Bibhas C. Giri , Non-linear Programming, Department of Mathematics Jadavpur University Kolkata, India.

5) Kungliga Tekniska Hogskolan , Division of Optimization and Systems Theory Department of Mathematics Stockholm, Sweden , 2014.

6) Aimé LACHAL , Modélisation en univers aléatoire , INSA LYON.

ج) مواقع الكترونية :

https://www.toppr.com/guides/maths/linear-programming/graphical-method-of-solving-a-linear-programming-problem/

https://www.analyticsvidhya.com/blog/2017/02/lintroductory-guide-on-linear-programming-explained-in-simple-english/
http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch3/twophase.htm

The Use of the Duality Principle to Solve Optimization Problems The Use of the Duality Principle to Solve Optimization Problems
https://doi.org/10.3991/ijes.v6i1.8224 Dr. Rowland Jerry Ekeocha!!", Uzor Chukwunedum, Anetor Clement Covenant University, Ota, Nigeria.
https://businessjargons.com/least-cost-method.html#:~:text=Definition%3A%20The%20Least%20Cost%20Method,the%20least%20cost%20of%20transportation

https://www.engineeringenotes.com/project-management-2/operations-research/testing-the-optimality-of-transportation-solution-operations-research/15526

http://ecoursesonline.iasri.res.in/mod/resource/view.php?id=4973

https://www.geeksforgeeks.org/difference-between-pert-and-cpm/

http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch7/cutplalgo.htm

https://www.techno-science.net/definition/6355.html

https://towardsdatascience.com/nonlinear-programming-theory-and-applications-cfe127b6060c

https://www.hindawi.com/journals/jam/2017/9037857/

https://www.tutorialspoint.com/design_and_analysis_of_algorithms/design_and_analysis_of_algorithms_dynamic_programming.htm

https://julia.quantecon.org/dynamic_programming/short_path.html

https://www.techno-science.net/definition/6426.html

https://slideplayer.com/slide/3962969/

https://towardsdatascience.com/markov-chains-simply-explained-dc77836b47e3
https://brilliant.org/wiki/markov-chains/

https://queue-it.com/blog/queuing-theory/#:~:text=Queuing%20theory%20(or%20queueing%20theory,customer%2C%20job%2C%20or%20request.

http://www.xavierdupre.fr/app/mlstatpy/helpsphinx/c_garden/file_dattente.html
https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/other/littles-law/

https://www.unleashedsoftware.com/blog/what-are-inventory-costs
https://xplaind.com/724780/quantity-discount

https://bizfluent.com/info-8628296-single-period-inventory-model.html

https://www.twi-global.com/technical-knowledge/faqs/faq-what-is-simulation

https://datascience.eu/fr/mathematiques-et-statistiques/definition-de-la-simulation-de-monte-carlo/

[1] https://www.influxdata.com/what-is-time-series-data/

https://docs.oracle.com/cd/E16582_01/doc.91/e15111/und_forecast_levels_methods.htm#EOAFM00177

functions and region shapes kkt conditions and quadratic programming , www.researchgate.net

wikipidia.og

https://www.maplesoft.com/

View publication stats